



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



Это цифровая копия книги, хранящейся для потомков на библиотечных полках, прежде чем ее отсканировали сотрудники компании Google в рамках проекта, цель которого - сделать книги со всего мира доступными через Интернет.

Прошло достаточно много времени для того, чтобы срок действия авторских прав на эту книгу истек, и она перешла в свободный доступ. Книга переходит в свободный доступ, если на нее не были поданы авторские права или срок действия авторских прав истек. Переход книги в свободный доступ в разных странах осуществляется по-разному. Книги, перешедшие в свободный доступ, это наш ключ к прошлому, к богатствам истории и культуры, а также к знаниям, которые часто трудно найти.

В этом файле сохранятся все пометки, примечания и другие записи, существующие в оригинальном издании, как напоминание о том долгом пути, который книга прошла от издателя до библиотеки и в конечном итоге до Вас.

Правила использования

Компания Google гордится тем, что сотрудничает с библиотеками, чтобы перевести книги, перешедшие в свободный доступ, в цифровой формат и сделать их широкодоступными. Книги, перешедшие в свободный доступ, принадлежат обществу, а мы лишь хранители этого достояния. Тем не менее, эти книги достаточно дорого стоят, поэтому, чтобы и в дальнейшем предоставлять этот ресурс, мы предприняли некоторые действия, предотвращающие коммерческое использование книг, в том числе установив технические ограничения на автоматические записи.

Мы также просим Вас о следующем.

- Не используйте файлы в коммерческих целях.
Мы разработали программу Поиск книг Google для всех пользователей, поэтому используйте эти файлы только в личных, некоммерческих целях.
- Не отправляйте автоматические записи.
Не отправляйте в систему Google автоматические записи любого вида. Если Вы занимаетесь изучением систем машинного перевода, оптического распознавания символов или других областей, где доступ к большому количеству текста может оказаться полезным, свяжитесь с нами. Для этих целей мы рекомендуем использовать материалы, перешедшие в свободный доступ.
- Не удаляйте атрибуты Google.
В каждом файле есть "водяной знак" Google. Он позволяет пользователям узнать об этом проекте и помогает им найти дополнительные материалы при помощи программы Поиск книг Google. Не удаляйте его.
- Делайте это законно.
Независимо от того, что Вы используете, не забудьте проверить законность своих действий, за которые Вы несете полную ответственность. Не думайте, что если книга перешла в свободный доступ в США, то ее на этом основании могут использовать читатели из других стран. Условия для перехода книги в свободный доступ в разных странах различны, поэтому нет единых правил, позволяющих определить, можно ли в определенном случае использовать определенную книгу. Не думайте, что если книга появилась в Поиске книг Google, то ее можно использовать как угодно и где угодно. Наказание за нарушение авторских прав может быть очень серьезным.

О программе Поиск книг Google

Миссия Google состоит в том, чтобы организовать мировую информацию и сделать ее всесторонне доступной и полезной. Программа Поиск книг Google помогает пользователям найти книги со всего мира, а авторам и издателям - новых читателей. Полнотекстовый поиск по этой книге можно выполнить на странице <http://books.google.com/>

Sci 1105.1(Ser.2,v.1,nol)

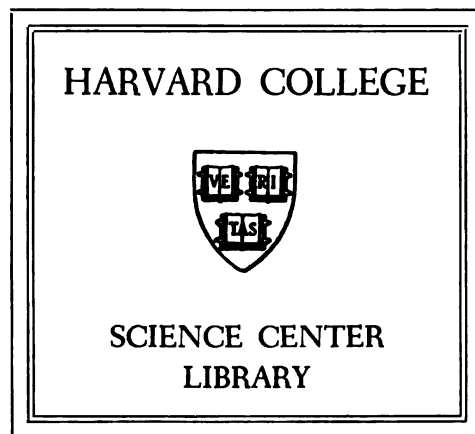
Kazan Univ. Fiziko-matem. ob-vo

WIDENER LIBRARY



HX GZX9 E

Sci 1105.1 (Ser 2 v1 no 4)



5.18

Ser. 1/4

Sci 1105.1 (Ser

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ PHYSICO-MATHÉMATIQUE
de Kâsan

Deuxième série. Tome I. № 4.

HARVARD
UNIVERSITY
LIBRARY

Kazan. Univ.
matem. ot

Am. Acad. Arts & Sci

„ИЗВѢСТІЯ“

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

ПРИ ИМПЕРАТОРСКОМЪ КАЗАНСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ.

ВТОРАЯ СЕРІЯ

ТОМЪ I

№ 4



КАЗАНЬ

Типографія Императорскаго Университета

1891

Печатано по опредѣленію Совѣта Физико-Математическаго Общества
при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ.

Предсѣдатель *А. Васильевъ*.

ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ТЕОРИЯ СВѢТА.

Д. А. ГОЛЬДГАММЕРА.

ГЛАВА IV.

Плоскія волны на границѣ изотропнаго и кристаллическаго діэлектриковъ.

§ 27. Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію кристаллическихъ прозрачныхъ средъ съ тремя взаимно перпендикулярными плоскостями симметріи, нормали къ которымъ мы примемъ соотвѣтственно за направленія осей координатъ x, y, z . Въ такихъ средахъ, очевидно, діэлектрическая постоянная D зависитъ отъ направленія. Пусть значенія D по направленію осей x, y, z суть соотвѣтственно .

$$D_x, D_y, D_z;$$

тогда мы должны взять

$$\begin{aligned}x &= \frac{D_x}{4\pi} F \\ y &= \frac{D_y}{4\pi} R \\ z &= \frac{D_z}{4\pi} Q\end{aligned} \tag{105}$$

и это ур. будетъ замѣнять прежнее наше ур. (2) у изотропныхъ тѣлъ; затѣмъ мы должны вездѣ взять $\kappa = \infty$, что зна-

чительно упрощает формулы, благодаря тому, что теперь исчезает Φ_* .

Так какъ далѣе для изотропныхъ тѣлъ должно быть вездѣ

$$\vartheta = \vartheta_0 = 0,$$

то это, понятно, остается въ силѣ и теперь; ур. (1)—(17) остаются также въ силѣ, хотя и въ упрощенномъ видѣ, а ур. (18) и (19) даютъ

$$\begin{aligned} P &= -\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{\mathfrak{B}_0} \frac{\partial U}{\partial t} \\ Q &= -\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{1}{\mathfrak{B}_0} \frac{\partial V}{\partial t} \\ R &= -\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{1}{\mathfrak{B}_0} \frac{\partial W}{\partial t} \end{aligned} \quad (106)$$

$$\begin{aligned} \Delta P &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-Af + A^2 k \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right) - \frac{1}{\mathfrak{B}_0} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \Delta U - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) \right\} \\ \Delta Q &= \frac{\partial}{\partial y} \left(-Af + A^2 k \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right) - \frac{1}{\mathfrak{B}_0} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \Delta V - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) \right\} \\ \Delta R &= \frac{\partial}{\partial z} \left(-Af + A^2 k \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right) - \frac{1}{\mathfrak{B}_0} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \Delta W - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (107)$$

Ур. (20) у насъ будетъ

$$\begin{aligned} u &= \frac{D_x}{4\pi} \frac{\partial P}{\partial t} \\ v &= \frac{D_y}{4\pi} \frac{\partial Q}{\partial t} \\ w &= \frac{D_z}{4\pi} \frac{\partial R}{\partial t} \end{aligned} \quad (108)$$

и, поступая совершенно аналогично тому, какъ мы поступали въ § 5, будемъ имѣть, полагая

$$\Delta U - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) = \Delta U$$

$$\Delta V - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) = \Delta V$$

$$\Delta W - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) = \Delta W,$$

$$\begin{aligned} & \Delta \left(\Delta U - \frac{D_x}{\mathfrak{D}_0} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right) = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{1+4\pi\epsilon_0} \frac{\partial \Delta f}{\partial t} - D_x \frac{\partial}{\partial t} \left(-\Delta f + A^2 k \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right) \right\} \\ & \Delta \left(\Delta V - \frac{D_y}{\mathfrak{D}_0} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right) = \\ & = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{1+4\pi\epsilon_0} \frac{\partial \Delta f}{\partial t} - D_y \frac{\partial}{\partial t} \left(-\Delta f + A^2 k \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right) \right\} \\ & \Delta \left(\Delta W - \frac{D_z}{\mathfrak{D}_0} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \right) = \\ & = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1}{1+4\pi\epsilon_0} \frac{\partial \Delta f}{\partial t} - D_z \frac{\partial}{\partial t} \left(-\Delta f + A^2 k \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (109)$$

Намъ нужно еще опредѣлить чѣмъ изобразить наши U , V , W : для этого положимъ какъ и прежде

$$\begin{aligned} U &= U + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ V &= V + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ W &= W + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} &= 0; \end{aligned}$$

тогда уравненіе

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{k}{1+4\pi\epsilon_0} \frac{\partial f}{\partial t}$$

даетъ снова прежнее

$$\Delta \Phi = -\frac{k}{1+4\pi\epsilon_0} \frac{\partial f}{\partial t},$$

а дифференцируя ур. (106) по x , y , z и складывая, а затѣмъ дѣлая то же съ ур. (108), будемъ имѣть

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = -\Delta f + A^2 k \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad (110)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi} \left(D_x \frac{\partial P}{\partial x} + D_y \frac{\partial Q}{\partial y} + D_z \frac{\partial R}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{1+4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial t} \Delta f. \end{aligned} \quad (111)$$

Какъ видимъ, теперь мы не можемъ исключить P , Q , R изъ ур. (110) и (111), какъ это мы дѣлали съ ур. (24) и (26), чтобы получить одно дифференціальное ур. для опредѣленія f . Точно также не исключается f и изъ ур. (109): но дѣло значительно упрощается, если мы примемъ ϵ_0 достаточно большимъ. Въ самомъ дѣлѣ, тогда A^2 очень мало и потому ур. (109) получаютъ видъ:

$$\begin{aligned} \Delta \left(\Delta U - \frac{D_x}{\mathfrak{D}_0} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} D_x \frac{\partial}{\partial t} \Delta f \\ \Delta \left(\Delta V - \frac{D_y}{\mathfrak{D}_0} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} D_y \frac{\partial}{\partial t} \Delta f \\ \Delta \left(\Delta W - \frac{D_z}{\mathfrak{D}_0} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \right) &= \frac{\partial}{\partial z} D_z \frac{\partial}{\partial t} \Delta f \end{aligned}$$

или же, полагая для краткости

$$\frac{\mathfrak{D}_0}{D_x} = \mathfrak{D}_x, \quad \frac{\mathfrak{D}_0}{D_y} = \mathfrak{D}_y, \quad \frac{\mathfrak{D}_0}{D_z} = \mathfrak{D}_z, \quad (112)$$

имѣемъ

$$\begin{aligned}\Delta(\mathfrak{B}_x \Delta U - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}) &= \mathfrak{B}_0 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \Delta f \\ \Delta(\mathfrak{B}_y \Delta V - \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}) &= \mathfrak{B}_0 \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial t} \Delta f \\ \Delta(\mathfrak{B}_z \Delta W - \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}) &= \mathfrak{B}_0 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial t} \Delta f\end{aligned}\quad (113)$$

и дифференцируя ур. (113) по x, y, z , складывая ихъ и замѣчая, что по условію

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0,$$

будемъ имѣть, опуская одинъ знакъ Δ :

$$\Delta(\mathfrak{B}_x \frac{\partial U}{\partial x} + \mathfrak{B}_y \frac{\partial V}{\partial y} + \mathfrak{B}_z \frac{\partial W}{\partial z}) = \mathfrak{B}_0 \Delta f \quad (114)$$

и это ур. позволяетъ уже исключить f изъ ур. (113); дѣлая это и опуская снова знакъ Δ имѣемъ

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= \mathfrak{B}_x \Delta U - \frac{\partial}{\partial x} (\mathfrak{B}_x \frac{\partial U}{\partial x} + \mathfrak{B}_y \frac{\partial V}{\partial y} + \mathfrak{B}_z \frac{\partial W}{\partial z}) \\ \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= \mathfrak{B}_y \Delta V - \frac{\partial}{\partial y} (\mathfrak{B}_x \frac{\partial U}{\partial x} + \mathfrak{B}_y \frac{\partial V}{\partial y} + \mathfrak{B}_z \frac{\partial W}{\partial z}) \\ \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} &= \mathfrak{B}_z \Delta W - \frac{\partial}{\partial z} (\mathfrak{B}_x \frac{\partial U}{\partial x} + \mathfrak{B}_y \frac{\partial V}{\partial y} + \mathfrak{B}_z \frac{\partial W}{\partial z})\end{aligned}\quad (115)$$

и эти ур. опредѣляютъ собою U, V, W , соответствующія строго поперечнымъ колебаніямъ; по U, V, W опредѣляемъ и f изъ ур. (114), а значить и Φ изъ ур.

$$\Delta \Phi = 0.$$

§ 28. Пусть наша среда безгранична; если бы мы взяли теперь подобно тому, какъ мы это дѣлали въ случаѣ изотропныхъ

тѣмъ, $f=0$ или $\Delta f=0$, мы получили бы

$$\mathfrak{B}_x \frac{\partial U}{\partial x} + \mathfrak{B}_y \frac{\partial V}{\partial y} + \mathfrak{B}_z \frac{\partial W}{\partial z} = 0,$$

что противорѣчитъ уравненію

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0.$$

Итакъ, въ неограниченныхъ кристаллахъ f конечно; за то, какъ увидимъ, мы можемъ взять теперь $\Phi=0$.

Пусть въ нашей средѣ распространяется прямолинейно поляризованная плоская волна, нормаль которой образуетъ съ осями x, y, z углы съ косинусами α, β, γ . Если S есть векторъ, котораго проекціями на оси координатъ служатъ U, V, W , то

$$\begin{aligned} U &= aS \\ V &= bS \\ W &= cS, \end{aligned} \quad (116)$$

гдѣ a, b, c суть косинусы угловъ S съ осями координатъ; для плоской волны мы можемъ взять символическое выраженіе

$$S = Se^{2\pi i \left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{L} - \frac{t}{T} \right)}, \quad (117)$$

гдѣ S не зависитъ отъ x, y, z . Тогда легко видѣть, что

$$\mathfrak{B}_x \frac{\partial U}{\partial x} + \mathfrak{B}_y \frac{\partial V}{\partial y} + \mathfrak{B}_z \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{2\pi i}{L} (a\alpha \mathfrak{B}_x^2 + b\beta \mathfrak{B}_y^2 + c\gamma \mathfrak{B}_z^2) S \quad (118)$$

и при

$$L = \mathfrak{B}T$$

подстановка выраженій (116), (117) (118) въ ур. (115) даетъ

$$\frac{\alpha}{\mathfrak{V}^2 - \mathfrak{V}_x^2} = \frac{a}{a\alpha\mathfrak{V}_x^2 + b\beta\mathfrak{V}_y^2 + c\gamma\mathfrak{V}_z^2}$$

$$\frac{\beta}{\mathfrak{V}^2 - \mathfrak{V}_y^2} = \frac{b}{a\alpha\mathfrak{V}_x^2 + b\beta\mathfrak{V}_y^2 + c\gamma\mathfrak{V}_z^2}$$

$$\frac{\gamma}{\mathfrak{V}^2 - \mathfrak{V}_z^2} = \frac{c}{a\alpha\mathfrak{V}_x^2 + b\beta\mathfrak{V}_y^2 + c\gamma\mathfrak{V}_z^2}.$$

Умножая эти ур. на α , β , γ соответственно и замѣчая, что въ силу ур.

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0$$

имѣемъ

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0, \quad (119)$$

мы находимъ

$$\frac{\alpha^2}{\mathfrak{V}^2 - \mathfrak{V}_x^2} + \frac{\beta^2}{\mathfrak{V}^2 - \mathfrak{V}_y^2} + \frac{\gamma^2}{\mathfrak{V}^2 - \mathfrak{V}_z^2} = 0. \quad (120)$$

Это—уравненіе Френелевской поверхности упругости¹⁾.

Далѣе наши уравненія переписутся и такъ:

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{-\mathfrak{V}^2 + \mathfrak{V}_x^2}{a\alpha\mathfrak{V}_x^2 + b\beta\mathfrak{V}_y^2 + c\gamma\mathfrak{V}_z^2}$$

$$\frac{\beta}{b} = \frac{-\mathfrak{V}^2 + \mathfrak{V}_y^2}{a\alpha\mathfrak{V}_x^2 + b\beta\mathfrak{V}_y^2 + c\gamma\mathfrak{V}_z^2}$$

$$\frac{\gamma}{c} = \frac{-\mathfrak{V}^2 + \mathfrak{V}_z^2}{a\alpha\mathfrak{V}_x^2 + b\beta\mathfrak{V}_y^2 + c\gamma\mathfrak{V}_z^2};$$

умножая эти уравненія соответственно на $\mathfrak{V}_y^2 - \mathfrak{V}_x^2$, $\mathfrak{V}_x^2 - \mathfrak{V}_z^2$, $\mathfrak{V}_x^2 - \mathfrak{V}_y^2$ и складывая затѣмъ, увидимъ, что правая часть новаго уравненія обратится въ нуль, а потому мы будемъ имѣть

$$\frac{a}{a}(\mathfrak{V}_y^2 - \mathfrak{V}_x^2) + \frac{\beta}{b}(\mathfrak{V}_x^2 - \mathfrak{V}_z^2) + \frac{\gamma}{c}(\mathfrak{V}_x^2 - \mathfrak{V}_y^2) = 0 \quad (121)$$

—извѣстное уравненіе Френелевской теоріи, опредѣляющее въ связи съ уравненіями (119) a , b , c по даннымъ α , β , γ .

¹⁾ Verdet, Oeuvres, V, p. 478, Paris, 1869.

Наконецъ, переписывая наши уравненія въ видѣ

$$\begin{aligned} a(\mathfrak{V}^2 - \mathfrak{V}_x^2) &= -\alpha(a\alpha\mathfrak{V}_x^2 + b\beta\mathfrak{V}_y^2 + c\gamma\mathfrak{V}_z^2) \\ b(\mathfrak{V}^2 - \mathfrak{V}_y^2) &= -\beta(a\alpha\mathfrak{V}_x^2 + b\beta\mathfrak{V}_y^2 + c\gamma\mathfrak{V}_z^2) \\ c(\mathfrak{V}^2 - \mathfrak{V}_z^2) &= -\gamma(a\alpha\mathfrak{V}_x^2 + b\beta\mathfrak{V}_y^2 + c\gamma\mathfrak{V}_z^2) \end{aligned}$$

и умножая ихъ соотвѣтственно на a , b , c и складывая, находимъ

$$a^2\mathfrak{V}_x^2 + b^2\mathfrak{V}_y^2 + c^2\mathfrak{V}_z^2 = \mathfrak{V}^2, \quad (122)$$

уравненіе т. н. „перваго“ эллипсоида въ теоріи Френеля¹⁾. Очевидно, $\mathfrak{V}$ есть скорость распространенія нашей волны, а $\mathfrak{V}_x$, $\mathfrak{V}_y$, $\mathfrak{V}_z$ суть скорости волнъ, въ которыхъ колебанія совершаются соотвѣтственно по осямъ x , y , z . Уравненія (119), (121), (122) суть условія, при которыхъ въ нашей средѣ возможны плоскія волны.

§ 29. Уравненія (114) и (118) позволяютъ теперь опредѣлить f ; именно, легко найти

$$f = -\frac{1}{\mathfrak{V}\mathfrak{V}_0} (a\alpha\mathfrak{V}_x^2 + b\beta\mathfrak{V}_y^2 + c\gamma\mathfrak{V}_z^2)S + f', \quad (123)$$

гдѣ f' удовлетворяетъ уравненію

$$\Delta f' = 0.$$

Отсюда слѣдуетъ

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= -\frac{2\pi i}{L} \frac{1}{\mathfrak{V}\mathfrak{V}_0} \alpha(a\alpha\mathfrak{V}_x^2 + b\beta\mathfrak{V}_y^2 + c\gamma\mathfrak{V}_z^2)S + \frac{\partial f'}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -\frac{2\pi i}{L} \frac{1}{\mathfrak{V}\mathfrak{V}_0} \beta(a\alpha\mathfrak{V}_x^2 + b\beta\mathfrak{V}_y^2 + c\gamma\mathfrak{V}_z^2)S + \frac{\partial f'}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= -\frac{2\pi i}{L} \frac{1}{\mathfrak{V}\mathfrak{V}_0} \gamma(a\alpha\mathfrak{V}_x^2 + b\beta\mathfrak{V}_y^2 + c\gamma\mathfrak{V}_z^2)S + \frac{\partial f'}{\partial z}. \end{aligned}$$

Далѣе изъ уравненія (6)

$$\Delta U = -4\pi u$$

$$\Delta V = -4\pi v$$

$$\Delta W = -4\pi w$$

¹⁾ Ibid., p. 471.

имѣемъ

$$u = \frac{\pi}{L^2} aS$$

$$v = \frac{\pi}{L^2} Sq$$

$$w = \frac{\pi}{L^2} cS,$$

откуда видимъ, что направленія векторовъ u , v , w , U , V , W совпадаютъ; понятно, этимъ же свойствомъ обладаетъ и x , y , z .

Для слагающихся магнитной силы изъ ур. (15) находимъ

$$\mathfrak{L} = -\frac{1}{\mathfrak{B}_0} \frac{2\pi i}{L} (by - cz)S$$

$$\mathfrak{M} = -\frac{1}{\mathfrak{B}_0} \frac{2\pi i}{L} (ca - az)S$$

$$\mathfrak{N} = -\frac{1}{\mathfrak{B}_0} \frac{2\pi i}{L} (a\beta - ba)S,$$

откуда, называя векторъ, котораго слагающія суть $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ черезъ $\mathfrak{S}$, имѣемъ

$$\cos(\mathfrak{S}S) = 0,$$

т. е. магнитная сила лежитъ въ плоскости волны и нормальна къ S .

Какъ видимъ, у насъ f не можетъ исчезать и неправильно принимаетъ Лорентцъ вездѣ $f = 0$.

Въ теоріи Максвелла можно принять $\Psi = 0$ ¹⁾ но тогда условіе

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0$$

¹⁾ Maxwell, 1. с., р. 403—404.

не имѣетъ мѣста и функція χ не есть нуль ¹⁾. Поэтому проще не брать $\Psi=0$, а сохранить условіе

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0;$$

тогда зато $\chi=0$, а Ψ играетъ до нѣкоторой степени роль нашего f .

Наконецъ изъ уравненія (108) можемъ по u , v , w опредѣлить и P , Q , R . Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ

$$\frac{D_x}{4\pi} \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\pi}{L^2} aS$$

$$\frac{D}{4\pi} \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\pi}{L^2} bS$$

$$\frac{D_x}{4\pi} \frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\pi}{L^2} cS$$

или же

$$\begin{aligned} P &= \frac{2\pi i}{L} \frac{1}{\mathfrak{B}_0} \frac{1}{\mathfrak{B}} a \mathfrak{B}_x S \\ Q &= \frac{2\pi i}{L} \frac{1}{\mathfrak{B}_0} \frac{1}{\mathfrak{B}} b \mathfrak{B}_y S \\ R &= \frac{2\pi i}{L} \frac{1}{\mathfrak{B}_0} \frac{1}{\mathfrak{B}} c \mathfrak{B}_x S; \end{aligned} \quad (124)$$

полагая теперь

$$P = a\Sigma$$

$$Q = b\Sigma$$

$$R = c\Sigma,$$

$$P^2 + Q^2 + R^2 = \Sigma,$$

имѣемъ

$$\Sigma = \frac{2\pi i}{L} \frac{1}{\mathfrak{B}_0} \frac{1}{\mathfrak{B}} \sqrt{a^2 \mathfrak{B}_x^2 + b^2 \mathfrak{B}_y^2 + c^2 \mathfrak{B}_x^2} S$$

¹⁾ Ibid., p. 237.

и кромѣ того

$$\begin{aligned} a &= \frac{a\mathfrak{B}_x^2}{\sqrt{a^2\mathfrak{B}_x^2 + b^2\mathfrak{B}_y^2 + c^2\mathfrak{B}_z^2}} \\ b &= \frac{b\mathfrak{B}_y^2}{\sqrt{a^2\mathfrak{B}_x^2 + b^2\mathfrak{B}_y^2 + c^2\mathfrak{B}_z^2}} \\ c &= \frac{c\mathfrak{B}_z^2}{\sqrt{a^2\mathfrak{B}_x^2 + b^2\mathfrak{B}_y^2 + c^2\mathfrak{B}_z^2}}, \end{aligned}$$

откуда находимъ, обозначая нормаль нашей волны черезъ N ,

$$\begin{aligned} \cos(N\Sigma) &= a\alpha + b\beta + c\gamma = \frac{aa\mathfrak{B}_x^2 + b\beta\mathfrak{B}_y^2 + c\gamma\mathfrak{B}_z^2}{\sqrt{a^2\mathfrak{B}_x^2 + b^2\mathfrak{B}_y^2 + c^2\mathfrak{B}_z^2}} \\ \cos(S\Sigma) &= a\alpha + b\beta + c\gamma = \frac{a^2\mathfrak{B}_x^2 + b^2\mathfrak{B}_y^2 + c^2\mathfrak{B}_z^2}{\sqrt{a^2\mathfrak{B}_x^2 + b^2\mathfrak{B}_y^2 + c^2\mathfrak{B}_z^2}} \end{aligned} \quad (125)$$

т. е. векторъ Σ (электровозбудительная сила) не совпадаетъ съ общимъ направленіемъ тока и діэлектрическаго момента S .

Легко доказать, что векторъ Σ лежитъ въ плоскости (NS) —въ плоскости „колебанія“. Если

$$a, b, c$$

суть косинусы угловъ луча съ осями координатъ, то какъ и въ обычной теоріи свѣта можно доказать, что и лучъ лежитъ въ плоскости колебанія, образуя съ нормалью волны уголъ, равный углу между S и Σ , такъ что лучъ нормаленъ въ вектору Σ , т. е.

$$aa + bb + cc = 0.$$

Подставляя сюда вмѣсто a, b, c ихъ выраженія, и присоединяя сюда два уравненія, показывающія, что лучъ, нормаль волны и векторъ S лежатъ въ одной плоскости, имѣемъ три уравненія для опредѣленія a, b, c

$$\begin{aligned} aa\mathfrak{B}_x^2 + bb\mathfrak{B}_y^2 + cc\mathfrak{B}_z^2 &= 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 &= 1 \\ \frac{ab - ba}{\alpha b - \beta a} &= \frac{ba - ac}{\gamma a - \alpha c} = \frac{bc - cb}{\beta c - \gamma b}. \end{aligned} \quad (126)$$

Намъ остается опредѣлить Φ . Для этого пользуемся ур.
(106)

$$\begin{aligned} P &= -\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{\mathfrak{B}_0} \frac{\partial U}{\partial t} \\ Q &= -\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{1}{\mathfrak{B}_0} \frac{\partial V}{\partial t} \\ R &= -\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{1}{\mathfrak{B}_0} \frac{\partial W}{\partial t}, \end{aligned}$$

вставляя сюда выраженія (123) и (124); тогда находимъ легко

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{2\pi i}{T} \frac{1}{\mathfrak{B}_0} \left\{ \alpha(a\alpha\mathfrak{B}_x + b\beta\mathfrak{B}_y + c\gamma\mathfrak{B}_z) - a\mathfrak{B}_x \right\} S - \mathfrak{B}_0 \frac{\partial f'}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{2\pi i}{T} \frac{1}{\mathfrak{B}_0} \left\{ \beta(a\alpha\mathfrak{B}_x + b\beta\mathfrak{B}_y + c\gamma\mathfrak{B}_z) - b\mathfrak{B}_y \right\} S - \mathfrak{B}_0 \frac{\partial f'}{\partial y} \\ \frac{\partial W}{\partial t} &= \frac{2\pi i}{T} \frac{1}{\mathfrak{B}_0} \left\{ \gamma(a\alpha\mathfrak{B}_x + b\beta\mathfrak{B}_y + c\gamma\mathfrak{B}_z) - c\mathfrak{B}_z \right\} S - \mathfrak{B}_0 \frac{\partial f'}{\partial z}, \end{aligned}$$

откуда, припоминая уравненія, какими мы пользовались для вывода уравненія (122), получаемъ

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= -\frac{2\pi i}{T} aS - \mathfrak{B}_0 \frac{\partial f'}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t} \\ \frac{\partial V}{\partial t} &= -\frac{2\pi i}{T} bS - \mathfrak{B}_0 \frac{\partial f'}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial t} \\ \frac{\partial W}{\partial t} &= -\frac{2\pi i}{T} cS - \mathfrak{B}_0 \frac{\partial f'}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial t}. \end{aligned}$$

Итакъ

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t} = -\mathfrak{B}_0 \frac{\partial f'}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial t} = -\mathfrak{B}_0 \frac{\partial f'}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial t} = -\mathfrak{B}_0 \frac{\partial f'}{\partial z}$$

или

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\mathfrak{B}_0 f'. \quad (127)$$

Очевидно, Φ или f' у насъ остаются неопредѣленными и, пока наша среда безгранична, мы можемъ прямо взять

$$\Phi = 0 \text{ и } f' = 0.$$

§ 30. Переходимъ къ отраженію и преломленію на границѣ изотропной и кристаллической среды. Эту границу, какъ и прежде, мы примемъ плоскостью, въ которой и помѣстимъ начало координатъ; направленіе осей x , y , z у насъ уже выбрано. Если p , q , r суть косинусы угловъ нормали къ плоскости раздѣла съ осями x , y , z , то

$$px + qy + rz = 0$$

будетъ уравненіемъ этой плоскости. Для всѣхъ ея точекъ

$$U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$$

$$V, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \text{ и } f$$

$$W, \frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z}$$

должны быть непрерывны: это — наши 12 условій на границѣ, ибо одно изъ нихъ не даетъ ничего новаго въ силу условія

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0.$$

Пусть далѣе въ верхней, изотропной средѣ распространяется плоская прямолинейно поляризованная волна, направленіе нормали которой опредѣляется углами съ косинусами α , β , γ . Легко сообразить, что мы получимъ одну отраженную и двѣ преломленныхъ волны: соответственные направленія нормалей этихъ волнъ пусть опредѣляются косинусами

$$\alpha_r, \beta_r, \gamma_r$$

$$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$$

$$\alpha_2, \beta_2, \gamma_2.$$

Пограничныя условія привели бы насъ къ противорѣчію, если бы мы взяли наши волны не плоскими и не прямо-

линейно поляризованными. Поэтому, обозначая векторы, которыхъ слагающія по осямъ x , y , z соответственно суть

$$\begin{aligned} U, \quad V, \quad W \\ U_r, \quad V_r, \quad W_r \\ U_1, \quad V_1, \quad W_1 \\ U_2, \quad V_2, \quad W_2, \end{aligned}$$

черезъ S , S_r , S_1 , S_2 , мы должны обозначить ихъ направленія черезъ

$$\begin{aligned} a, \quad b, \quad c \\ a_r, \quad b_r, \quad c_r \\ a_1, \quad b_1, \quad c_1 \\ a_2, \quad b_2, \quad c_2. \end{aligned}$$

Наконецъ полагая для падающей волны, какъ и въ случаѣ изотропныхъ средъ,

$$\Phi = 0,$$

мы возьмемъ

$$\begin{aligned} U &= aS & V &= bS & W &= cS \\ U_r &= a_r S_r + \frac{\partial \Phi_r}{\partial x}, & V_r &= b_r S_r + \frac{\partial \Phi_r}{\partial y}, & W_r &= c_r S_r + \frac{\partial \Phi_r}{\partial z} \\ U_1 &= a_1 S_1 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}, & V_1 &= b_1 S_1 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}, & W_1 &= c_1 S_1 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \\ U_2 &= a_2 S_2 + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}, & V_2 &= b_2 S_2 + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}, & W_2 &= c_2 S_2 + \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}, \end{aligned}$$

гдѣ можемъ положить

$$\begin{aligned} S &= S e^{2\pi i \left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{L} - \frac{t}{T} \right)} \\ S_r &= S_r e^{2\pi i \left(\frac{\alpha_r x + \beta_r y + \gamma_r z}{L} - \frac{t}{T} \right)} \\ S_1 &= S_1 e^{2\pi i \left(\frac{\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z}{L_1} - \frac{t}{T_1} \right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_r &= S_r e^{2\pi i \left(\frac{\alpha_r x + \beta_r y + \gamma_r z}{L_r} - \frac{t}{T_r} \right)} \\ \Phi_r &= i D_r e^{2\pi i \left(\frac{\alpha'_r x + \beta'_r y + \gamma'_r z}{L_r} - \frac{t}{T_r} \right)} \\ \Phi_1 &= i D_1 e^{2\pi i \left(\frac{\alpha'_1 x + \beta'_1 y + \gamma'_1 z}{L_1} - \frac{t}{T_1} \right)} \\ \Phi_2 &= i D_2 e^{2\pi i \left(\frac{\alpha'_2 x + \beta'_2 y + \gamma'_2 z}{L_2} - \frac{t}{T_2} \right)}; \end{aligned}$$

при чемъ по предыдущему

$$\begin{aligned} a\alpha + b\beta + c\gamma &= 0 \\ a_r\alpha_r + b_r\beta_r + c_r\gamma_r &= 0 \\ a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1 &= 0 \\ a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2 &= 0 \end{aligned} \quad (128)$$

$$\begin{aligned} L &= \mathfrak{B}T \\ L_1 &= \mathfrak{B}_1 T_1 \\ L_2 &= \mathfrak{B}_2 T_2 \end{aligned} \quad (129)$$

$$\begin{aligned} U &= aS, \quad V = bS, \quad W = cS \\ U_r &= a_r S_r, \quad V_r = b_r S_r, \quad W_r = c_r S_r \\ U_1 &= a_1 S_1, \quad V_1 = b_1 S_1, \quad W_1 = c_1 S_1 \\ U_2 &= a_2 S_2, \quad V_2 = b_2 S_2, \quad W_2 = c_2 S_2 \end{aligned}$$

и U, V, W, U_r, V_r, W_r удовлетворяютъ дифференціальнымъ ур. (29), а U_1, V_1, W_1 и U_2, V_2, W_2 дифференціальнымъ ур. (115). Отсюда слѣдуетъ, что (ур. 122)

$$\begin{aligned} a_1 \mathfrak{B}_x^2 + b_1 \mathfrak{B}_y^2 + c_1 \mathfrak{B}_z^2 &= \mathfrak{B}_1^2 \\ a_2 \mathfrak{B}_x^2 + b_2 \mathfrak{B}_y^2 + c_2 \mathfrak{B}_z^2 &= \mathfrak{B}_2^2 \end{aligned} \quad (130)$$

и изъ ур. (121)

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_1}{a_1}(\mathfrak{B}_y^2 - \mathfrak{B}_x^2) + \frac{\beta_1}{b_1}(\mathfrak{B}_x^2 - \mathfrak{B}_z^2) + \frac{\gamma_1}{c_1}(\mathfrak{B}_z^2 - \mathfrak{B}_y^2) &= 0 \\ \frac{\alpha_2}{a_2}(\mathfrak{B}_y^2 - \mathfrak{B}_x^2) + \frac{\beta_2}{b_2}(\mathfrak{B}_x^2 - \mathfrak{B}_z^2) + \frac{\gamma_2}{c_2}(\mathfrak{B}_z^2 - \mathfrak{B}_y^2) &= 0, \end{aligned} \quad (131)$$

при чемъ понятно

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 1 & a^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1 \\ a_r^2 + b_r^2 + c_r^2 &= 1, \alpha_r'^2 + \beta_r'^2 + \gamma_r'^2 = 1, \alpha_r^2 + \beta_r^2 + \gamma_r^2 = 1 & (132) \\ a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 &= 1, \alpha_1'^2 + \beta_1'^2 + \gamma_1'^2 = 1, \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1 \\ a_s^2 + b_s^2 + c_s^2 &= 1, \alpha_s'^2 + \beta_s'^2 + \gamma_s'^2 = 1, \alpha_s^2 + \beta_s^2 + \gamma_s^2 = 1, \end{aligned}$$

и Φ_r, Φ_1, Φ_s удовлетворяютъ дифференціальнымъ уравне-
ніямъ

$$\Delta \Phi_r = 0$$

$$\Delta \Phi_1 = 0$$

$$\Delta \Phi_s = 0,$$

откуда слѣдуетъ, что

$$l_r = \infty, \quad l_1 = \infty, \quad l_s = \infty. \quad (133)$$

Условія на границѣ требуютъ прежде всего, чтобы для

$$x = \frac{qy + rz}{p}$$

было бы

$$\begin{aligned} \frac{ax + \beta y + \gamma z}{L} &= \frac{\alpha_r x + \beta_r y + \gamma_r z}{L} = \frac{\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z}{L_1} = \frac{\alpha_s x + \beta_s y + \gamma_s z}{L_s} = \\ &= \frac{\alpha_r' x + \beta_r' y + \gamma_r' z}{l_r} = \frac{\alpha_1' x + \beta_1' y + \gamma_1' z}{l_1} = \frac{\alpha_s' x + \beta_s' y + \gamma_s' z}{l_s} \\ T &= T_1 = T_s = T_r = T_1' = T_s', \end{aligned}$$

т. е. чтобы

$$\begin{aligned} \frac{\beta p - \alpha q}{Lp} y + \frac{\gamma p - \alpha r}{Lp} z &= \frac{\beta_r p - \alpha_r q}{Lp} y + \frac{\gamma_r p - \alpha_r r}{Lp} z = \\ &= \frac{\beta_1 p - \alpha_1 q}{L_1 p} y + \frac{\gamma_1 p - \alpha_1 r}{L_1 p} z = \frac{\beta_s p - \alpha_s q}{L_s p} y + \frac{\gamma_s p - \alpha_s r}{L_s p} z = \\ &= \frac{\beta_r' p - \alpha_r' q}{l_r p} y + \frac{\gamma_r' p - \alpha_r' r}{l_r p} z = \frac{\beta_1' p - \alpha_1' q}{l_1 p} y + \frac{\gamma_1' p - \alpha_1' r}{l_1 p} z = \\ &= \frac{\beta_s' p - \alpha_s' q}{l_s p} y + \frac{\gamma_s' p - \alpha_s' r}{l_s p} z \end{aligned}$$

при всѣхъ значеніяхъ y и z . Отсюда слѣдуетъ:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\beta p - \alpha q}{L} = \frac{\beta_r p - \alpha_r q}{L} = \frac{\beta_1 p - \alpha_1 q}{L_1} = \frac{\beta_2 p - \alpha_2 q}{L_2} = \\ & \quad = \frac{\beta_r' p - \alpha_r' q}{l_r} = \frac{\beta_1' p - \alpha_1' q}{l_1} = \frac{\beta_2' p - \alpha_2' q}{l_2} \\ \text{и} \\ & \frac{\gamma p - \alpha r}{L} = \frac{\gamma_r p - \alpha_r r}{L} = \frac{\gamma_1 p - \alpha_1 r}{L_1} = \frac{\gamma_2 p - \alpha_2 r}{L_2} = \\ & \quad = \frac{\gamma_r' p - \alpha_r' r}{l_r} = \frac{\gamma_1' p - \alpha_1' r}{l_1} = \frac{\gamma_2' p - \alpha_2' r}{l_2} \end{aligned} \right\} (134)$$

Если бы мы исключали подобнымъ же образомъ не x , а y и z послѣдовательно, то получили бы тѣ же два уравненія и еще одно, какъ слѣдствіе первыхъ:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma q - \beta r}{L} &= \frac{\gamma_r q - \beta_r r}{L} = \frac{\gamma_1 q - \beta_1 r}{L_1} = \frac{\gamma_2 q - \beta_2 r}{L_2} = \\ &= \frac{\gamma_r' q - \beta_r' r}{l_r} = \frac{\gamma_1' q - \beta_1' r}{l_1} = \frac{\gamma_2' q - \beta_2' r}{l_2}. \end{aligned}$$

§ 31. Пусть далѣе ψ , ψ_r , ψ_1 , ψ_2 , θ_r , θ_1 , θ_2 будутъ углы нормали къ плоскости раздѣла съ нормалью нашихъ волнъ соответственно; тогда очевидно,

$$\begin{aligned} \alpha p + \beta q + \gamma r &= \cos \psi \\ \alpha_r p + \beta_r q + \gamma_r r &= \cos \psi_r \\ \alpha_1 p + \beta_1 q + \gamma_1 r &= \cos \psi_1 \\ \alpha_2 p + \beta_2 q + \gamma_2 r &= \cos \psi_2 \\ \alpha_r' p + \beta_r' q + \gamma_r' r &= \cos \theta_r' \\ \alpha_1' p + \beta_1' q + \gamma_1' r &= \cos \theta_1' \\ \alpha_2' p + \beta_2' q + \gamma_2' r &= \cos \theta_2'; \end{aligned} \quad (135)$$

далѣе, если l , m , n , l_r , m_r , n_r , l_1 , m_1 , n_1 , l_2 , m_2 , n_2 , l_r' , m_r' , n_r' , l_1' , m_1' , n_1' , l_2' , m_2' , n_2' суть углы съ осями координатъ

нормалей въ плоскостяхъ, проходящихъ черезъ $N, N_r, N_1, N_2, N_r', N_1', N_2'$ — нормали всѣхъ нашихъ волнъ и нормаль въ плоскости раздѣла, то напр.

$$\begin{aligned} \beta p - \alpha q \\ \alpha r - \gamma p \\ \gamma q - \beta r \end{aligned}$$

будутъ, очевидно, пропорціональны $\cos n, \cos m, \cos l$; а евад-рируя эти выраженія и складывая, найдемъ, послѣ легкихъ преобразований, что коэффициентъ пропорціональности есть $\sin \psi$. Такимъ образомъ имѣемъ

$$\begin{aligned} \beta p - \alpha q &= \sin \psi \cos n & \beta_r p - \alpha_r q &= \sin \psi_r \cos n_r \\ \alpha r - \gamma p &= \sin \psi \cos m & \alpha_r r - \gamma_r p &= \sin \psi_r \cos m_r \\ \gamma q - \beta r &= \sin \psi \cos l & \gamma_r q - \beta_r r &= \sin \psi_r \cos l_r \\ \beta_1 p - \alpha_1 q &= \sin \psi_1 \cos n_1 & \beta_2 p - \alpha_2 q &= \sin \psi_2 \cos n_2 \\ \alpha_1 r - \gamma_1 p &= \sin \psi_1 \cos m_1 & \alpha_2 r - \gamma_2 p &= \sin \psi_2 \cos m_2 \\ \gamma_1 q - \beta_1 r &= \sin \psi_1 \cos l_1, & \gamma_2 q - \beta_2 r &= \sin \psi_2 \cos l_2, \\ \beta_r' p - \alpha_r' q &= \sin \theta_r \cos n_r \\ \alpha_r' r - \gamma_r' p &= \sin \theta_r \cos m_r \\ \gamma_r' q - \beta_r' r &= \sin \theta_r \cos l_r, \\ \beta_1' p - \alpha_1' q &= \sin \theta_1 \cos l_1' & \beta_2' p - \alpha_2' q &= \sin \theta_2 \cos l_2' \\ \alpha_1' r - \gamma_1' p &= \sin \theta_1 \cos m_1' & \alpha_2' r - \gamma_2' p &= \sin \theta_2 \cos m_2' \\ \gamma_1' q - \beta_1' r &= \sin \theta_1 \cos n_1', & \gamma_2' q - \beta_2' r &= \sin \theta_2 \cos n_2', \end{aligned}$$

и ур. наши даютъ намъ:

$$\begin{aligned} \cos l &= \cos l_r = \cos l_1 = \cos l_2 = \cos l_r' = \cos l_1' = \cos l_2' \\ \cos m &= \cos m_r = \cos m_1 = \cos m_2 = \cos m_r' = \cos m_1' = \cos m_2' \\ \cos n &= \cos n_r = \cos n_1 = \cos n_2 = \cos n_r' = \cos n_1' = \cos n_2' \\ \sin \psi &= \sin \psi_r, \frac{\sin \psi}{L} = \frac{\sin \psi_1}{L_1} = \frac{\sin \psi_2}{L_2} = \frac{\sin \theta_r}{l_r} = \frac{\sin \theta_1}{l_1} = \frac{\sin \theta_2}{l_2} \quad (186) \end{aligned}$$

Отсюда ясно, что нормали всѣхъ волнъ лежатъ въ одной и той же плоскости—плоскости паденія; уголъ паденія равенъ углу отраженія.

$$\sin \psi_r = \pi - \psi$$

и синусы угловъ нормалей преломленныхъ волнъ ψ_1 и ψ_2 , θ_1 и θ_2 съ нормалью къ плоскости раздѣла находятся съ синусомъ угла паденія (ψ) въ отношеніи, равномъ отношенію соответственныхъ длинъ волнъ, или скоростей.

Изъ послѣдняго соотношенія будемъ имѣть, какъ и въ случаѣ изотропныхъ тѣлъ,

$$\frac{\cos \theta_r}{l_r} = i \frac{\sin \psi}{L}$$

$$\frac{\cos \theta_1}{l_1} = -i \frac{\sin \psi}{L}$$

$$\frac{\cos \theta_2}{l_2} = -i \frac{\sin \psi}{L}.$$

Такъ какъ теперь послѣднія два ур. (128), ур. (131) и третье и четвертое ур. (132) опредѣляютъ совершенно $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ черезъ $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, а эти послѣднія величины опредѣляются вполнѣ ур. (129), (130) и (134), то направленія нормалей преломленныхъ волнъ, какъ и направленія ихъ колебаній, опредѣляются исключительно оптическими свойствами данныхъ средъ ($\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_x, \mathfrak{B}_y, \mathfrak{B}_z$) и направленіемъ нормали падающей волны (α, β, γ) независимо отъ величинъ a, b, c , т. е. отъ направленія поляризаціи падающей волны. Значитъ и въ томъ случаѣ, когда падающій лучъ вовсе неполяризованъ, т. е. является естественнымъ, въ кристаллѣ все таки мы получимъ два луча, прямолинейно поляризованныхъ по совершенно опредѣленнымъ направленіямъ.

Неизвѣстными у насъ далѣе остаются направленіе нормали ($\alpha_r, \beta_r, \gamma_r$) и поляризаціи (a_r, b_r, c_r) отраженного луча

и величины $S_r, S_1, S_2, \mathfrak{D}_r, \mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \frac{\alpha_r}{l_r}, \frac{\beta_r}{l_r}, \frac{\gamma_r}{l_r}, \frac{\alpha_1}{l_1}, \frac{\beta_1}{l_1}, \frac{\gamma_1}{l_1}, \frac{\alpha_2}{l_2}, \frac{\beta_2}{l_2}, \frac{\gamma_2}{l_2}$, для опредѣленія которыхъ мы имѣемъ 12 условій непрерывности на границѣ U, V, W , ихъ производныхъ и f и кромѣ того еще нѣкоторые изъ ур. (128), (132), (135) и (136). Легко обнаружить, что у насъ число неизвѣстныхъ какъ разъ равно числу уравненій.

§ 32. Введемъ новыя оси координатъ ξ, η, ζ , принимая нормаль къ плоскости раздѣла двухъ средъ за ось ξ , а сѣченіе плоскостей паденія и раздѣла за ось η . Тогда ось ζ будетъ лежать въ плоскости раздѣла и нормальна къ плоскости паденія. Положеніе этихъ осей, очевидно, вполне определено данными $\alpha, \beta, \gamma, p, q, r$. Назовемъ черезъ $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ и т. д. величины a, b, c и т. д., отнесенныя къ новымъ осямъ; тогда, такъ какъ всѣ нормали волнъ лежатъ въ плоскости $\xi\eta$, то

$$\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_r = \bar{\gamma}_1 = \bar{\gamma}_2 = \bar{\gamma}_r' = \bar{\gamma}_1' = \bar{\gamma}_2' = 0$$

$$\bar{a} = \cos\psi, \quad \bar{\beta} = \sin\psi; \quad \bar{a}_1 = \cos\psi_1, \quad \bar{\beta}_1 = \sin\psi_1;$$

$$\bar{a}_r = -\cos\psi, \quad \bar{\beta}_r = \sin\psi; \quad \bar{a}_2 = \cos\psi_2, \quad \bar{\beta}_2 = \sin\psi_2;$$

$$\bar{a}_r' = \cos\theta_r, \quad \bar{\beta}_r' = \sin\theta_r,$$

$$\bar{a}_1' = \cos\theta_1, \quad \bar{\beta}_1' = \sin\theta_1,$$

$$\bar{a}_2' = \cos\theta_2, \quad \bar{\beta}_2' = \sin\theta_2,$$

при чемъ, какъ извѣстно,

$$\frac{\cos\theta_r}{r} = i \frac{\sin\psi}{L}; \quad \frac{\sin\theta_r}{l_r} = \frac{\sin\psi}{L}$$

$$\frac{\cos\theta_1}{l_1} = -i \frac{\sin\psi}{L}; \quad \frac{\sin\theta_1}{l_1} = \frac{\sin\psi}{L}; \quad \frac{\sin\psi_1}{L_1} = \frac{\sin\psi_2}{L_2} = \frac{\sin\psi}{L}$$

$$\frac{\cos\theta_2}{l_2} = -i \frac{\sin\psi}{L}; \quad \frac{\sin\theta_2}{l_2} = \frac{\sin\psi}{L}.$$

Называя кроме того через ω , ω_r , ω_1 , ω_2 углы направлений колебаний съ осью Z , имѣемъ очевидно

$$\begin{aligned}\bar{a} &= \sin\psi \sin\omega; \quad \bar{b} = -\cos\psi \sin\omega; \quad \bar{c} = \cos\omega \\ \bar{a}_r &= \sin\psi \sin\omega_r; \quad \bar{b}_r = \cos\psi \sin\omega_r; \quad \bar{c}_r = \cos\omega_r \\ \bar{a}_1 &= \sin\psi_1 \sin\omega_1; \quad \bar{b}_1 = -\cos\psi_1 \sin\omega_1; \quad \bar{c}_1 = \cos\omega_1 \\ \bar{a}_2 &= \sin\psi_2 \sin\omega_2; \quad \bar{b}_2 = -\cos\psi_2 \sin\omega_2; \quad \bar{c}_2 = \cos\omega_2.\end{aligned}$$

Этими величинами оставшіяся ур. (127), (132), (135), (136) удовлетворяются тождественно и намъ остается опредѣлить ω_r , S_r , S_1 , S_2 , $\mathfrak{D}_r$, $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ изъ 12 условій на границѣ.

Легко видѣть, что условія непрерывности U , V , W и ихъ производныхъ сводятся къ слѣдующимъ 12 уравненіямъ (если перейти отъ $\frac{\partial U}{\partial x}$ и т. д. къ $\frac{\partial U}{\partial \xi}$ и т. д.)

$$\begin{aligned}\bar{a}S + \bar{a}_r S_r - 2\pi \mathfrak{D}_r \frac{\bar{a}_r'}{l_r} &= \bar{a}_1 S_1 - 2\pi \mathfrak{D}_1 \frac{\bar{a}_1'}{l_1} + \bar{a}_2 S_2 - 2\pi \mathfrak{D}_2 \frac{\bar{a}_2'}{l_2} \\ \bar{b}S + \bar{b}_r S_r - 2\pi \mathfrak{D}_r \frac{\bar{b}_r'}{l_r} &= \bar{b}_1 S_1 - 2\pi \mathfrak{D}_1 \frac{\bar{b}_1'}{l_1} + \bar{b}_2 S_2 - 2\pi \mathfrak{D}_2 \frac{\bar{b}_2'}{l_2} \\ \bar{c}S + \bar{c}_r S_r - 2\pi \mathfrak{D}_r \frac{\bar{c}_r'}{l_r} &= \bar{c}_1 S_1 - 2\pi \mathfrak{D}_1 \frac{\bar{c}_1'}{l_1} + \bar{c}_2 S_2 - 2\pi \mathfrak{D}_2 \frac{\bar{c}_2'}{l_2} \\ \frac{\bar{a}\bar{a}}{L}S + \frac{\bar{a}_r\bar{a}_r}{L}S_r - 2\pi \mathfrak{D}_r \frac{\bar{a}_r'^2}{l_r^2} &= \frac{\bar{a}_1\bar{a}_1}{L_1}S_1 - 2\pi \mathfrak{D}_1 \frac{\bar{a}_1'^2}{l_1^2} + \frac{\bar{a}_2\bar{a}_2}{L_2}S_2 - 2\pi \mathfrak{D}_2 \frac{\bar{a}_2'^2}{l_2^2} \\ \frac{\bar{a}\bar{\beta}}{L}S + \frac{\bar{a}_r\bar{\beta}_r}{L}S_r - 2\pi \mathfrak{D}_r \frac{\bar{a}_r'\bar{\beta}_r'}{l_r^2} &= \frac{\bar{a}_1\bar{\beta}_1}{L_1}S_1 - 2\pi \mathfrak{D}_1 \frac{\bar{a}_1'\bar{\beta}_1'}{l_1^2} + \frac{\bar{a}_2\bar{\beta}_2}{L_2}S_2 - 2\pi \mathfrak{D}_2 \frac{\bar{a}_2'\bar{\beta}_2'}{l_2^2} \\ \frac{\bar{a}\bar{\gamma}}{L}S + \frac{\bar{a}_r\bar{\gamma}_r}{L}S_r - 2\pi \mathfrak{D}_r \frac{\bar{a}_r'\bar{\gamma}_r'}{l_r^2} &= \frac{\bar{a}_1\bar{\gamma}_1}{L_1}S_1 - 2\pi \mathfrak{D}_1 \frac{\bar{a}_1'\bar{\gamma}_1'}{l_1^2} + \frac{\bar{a}_2\bar{\gamma}_2}{L_2}S_2 - 2\pi \mathfrak{D}_2 \frac{\bar{a}_2'\bar{\gamma}_2'}{l_2^2} \\ \frac{\bar{b}\bar{a}}{L}S + \frac{\bar{b}_r\bar{a}_r}{L}S_r - 2\pi \mathfrak{D}_r \frac{\bar{a}_r'\bar{\beta}_r'}{l_r^2} &= \frac{\bar{b}_1\bar{a}_1}{L_1}S_1 - 2\pi \mathfrak{D}_1 \frac{\bar{a}_1'\bar{\beta}_1'}{l_1^2} + \frac{\bar{b}_2\bar{a}_2}{L_2}S_2 - 2\pi \mathfrak{D}_2 \frac{\bar{a}_2'\bar{\beta}_2'}{l_2^2} \\ \frac{\bar{b}\bar{\beta}}{L}S + \frac{\bar{b}_r\bar{\beta}_r}{L}S_r - 2\pi \mathfrak{D}_r \frac{\bar{\beta}_r'^2}{l_r^2} &= \frac{\bar{b}_1\bar{\beta}_1}{L_1}S_1 - 2\pi \mathfrak{D}_1 \frac{\bar{\beta}_1'^2}{l_1^2} + \frac{\bar{b}_2\bar{\beta}_2}{L_2}S_2 - 2\pi \mathfrak{D}_2 \frac{\bar{\beta}_2'^2}{l_2^2} \\ \frac{\bar{b}\bar{\gamma}}{L}S + \frac{\bar{b}_r\bar{\gamma}_r}{L}S_r - 2\pi \mathfrak{D}_r \frac{\bar{\beta}_r'\bar{\gamma}_r'}{l_r^2} &= \frac{\bar{b}_1\bar{\gamma}_1}{L_1}S_1 - 2\pi \mathfrak{D}_1 \frac{\bar{\beta}_1'\bar{\gamma}_1'}{l_1^2} + \frac{\bar{b}_2\bar{\gamma}_2}{L_2}S_2 - 2\pi \mathfrak{D}_2 \frac{\bar{\beta}_2'\bar{\gamma}_2'}{l_2^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\bar{c}\bar{\alpha}}{\bar{L}}S + \frac{\bar{c}_r\bar{\alpha}_r}{\bar{L}}S_r - 2\pi\mathfrak{D}_r\frac{\bar{\alpha}_r'\bar{\gamma}_r'}{\bar{l}_r^2} &= \frac{\bar{c}_1\bar{\alpha}_1}{\bar{L}_1}S_1 - 2\pi\mathfrak{D}_1\frac{\bar{\alpha}_1'\bar{\gamma}_1'}{\bar{l}_1^2} + \frac{\bar{c}_2\bar{\alpha}_2}{\bar{L}_2}S_2 - 2\pi\mathfrak{D}_2\frac{\bar{\alpha}_2'\bar{\gamma}_2'}{\bar{l}_2^2}, \\ \frac{\bar{c}\bar{\beta}}{\bar{L}}S + \frac{\bar{c}_r\bar{\beta}_r}{\bar{L}}S_r - 2\pi\mathfrak{D}_r\frac{\bar{\beta}_r'\bar{\gamma}_r'}{\bar{l}_r^2} &= \frac{\bar{c}_1\bar{\beta}_1}{\bar{L}_1}S_1 - 2\pi\mathfrak{D}_1\frac{\bar{\beta}_1'\bar{\gamma}_1'}{\bar{l}_1^2} + \frac{\bar{c}_2\bar{\beta}_2}{\bar{L}_2}S_2 - 2\pi\mathfrak{D}_2\frac{\bar{\beta}_2'\bar{\gamma}_2'}{\bar{l}_2^2}, \\ \frac{\bar{c}\bar{\gamma}}{\bar{L}}S + \frac{\bar{c}_r\bar{\gamma}_r}{\bar{L}}S_r - 2\pi\mathfrak{D}_r\frac{\bar{\gamma}_r'^2}{\bar{l}_r^2} &= \frac{\bar{c}_1\bar{\gamma}_1}{\bar{L}_1}S_1 - 2\pi\mathfrak{D}_1\frac{\bar{\gamma}_1'^2}{\bar{l}_1^2} + \frac{\bar{c}_2\bar{\gamma}_2}{\bar{L}_2}S_2 - 2\pi\mathfrak{D}_2\frac{\bar{\gamma}_2'^2}{\bar{l}_2^2},\end{aligned}$$

а условие непрерывности потенціала даетъ для $\xi=0$:

$$\bar{f}_r = \bar{f}_1 + \bar{f}_2.$$

Но мы знаемъ, что для изотропныхъ тѣлъ (при $\varepsilon=\infty$) (ур. 32)

$$f = -\frac{1}{\mathfrak{B}_0^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

а у кристалловъ

$$f_1 = -\frac{1}{\mathfrak{B}_1} \frac{1}{\mathfrak{B}_0^2} (a_1\alpha_1\mathfrak{B}_x^2 + b_1\beta_1\mathfrak{B}_y^2 + c_1\gamma_1\mathfrak{B}_x^2) S_1 + f_1',$$

$$f_2 = -\frac{1}{\mathfrak{B}_2} \frac{1}{\mathfrak{B}_0^2} (a_2\alpha_2\mathfrak{B}_x^2 + b_2\beta_2\mathfrak{B}_y^2 + c_2\gamma_2\mathfrak{B}_x^2) S_2 + f_2',$$

$$f_1' = -\frac{1}{\mathfrak{B}_0^2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial t},$$

$$f_2' = -\frac{1}{\mathfrak{B}_0^2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial t},$$

при чемъ вообще у всѣхъ прозрачныхъ средъ

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{2\pi}{T} \mathfrak{D} e^{i\Psi}.$$

Итакъ, мы будемъ имѣть еще уравненіе

$$\begin{aligned}\frac{2\pi}{T} (\mathfrak{D}_r - \mathfrak{D}_1 - \mathfrak{D}_2) &= \frac{1}{\mathfrak{B}_1} (a_1\alpha_1\mathfrak{B}_x^2 + b_1\beta_1\mathfrak{B}_y^2 + c_1\gamma_1\mathfrak{B}_x^2) S_1 + \\ &+ \frac{1}{\mathfrak{B}_2} (a_2\alpha_2\mathfrak{B}_x^2 + b_2\beta_2\mathfrak{B}_y^2 + c_2\gamma_2\mathfrak{B}_x^2) S_2,\end{aligned}$$

а такъ какъ по ур. (125), мы имѣемъ

$$\frac{a_1 \alpha_1 \mathfrak{B}_x^2 + b_1 \beta_1 \mathfrak{B}_y^2 + c_1 \gamma_1 \mathfrak{B}_z^2}{\sqrt{a_1^2 \mathfrak{B}_x^2 + b_1^2 \mathfrak{B}_y^2 + c_1^2 \mathfrak{B}_z^2}} = -\sin d_1$$

$$\frac{a_2 \alpha_2 \mathfrak{B}_x^2 + b_2 \beta_2 \mathfrak{B}_y^2 + c_2 \gamma_2 \mathfrak{B}_z^2}{\sqrt{a_2^2 \mathfrak{B}_x^2 + b_2^2 \mathfrak{B}_y^2 + c_2^2 \mathfrak{B}_z^2}} = -\sin d_2$$

и

$$\frac{\mathfrak{B}_x^2}{\sqrt{a_1^2 \mathfrak{B}_x^2 + b_1^2 \mathfrak{B}_y^2 + c_1^2 \mathfrak{B}_z^2}} = \cos d_1$$

$$\frac{\mathfrak{B}_x^2}{\sqrt{a_2^2 \mathfrak{B}_x^2 + b_2^2 \mathfrak{B}_y^2 + c_2^2 \mathfrak{B}_z^2}} = \cos d_2,$$

то очевидно

$$-\frac{2\pi}{T} (\mathfrak{D}_r - \mathfrak{D}_1 - \mathfrak{D}_2) = \mathfrak{B}_1 S_1 \operatorname{tg} d_1 + \mathfrak{B}_2 S_2 \operatorname{tg} d_2$$

или же иначе

$$2\pi \frac{\sin \psi}{L} (\mathfrak{D}_r - \mathfrak{D}_1 - \mathfrak{D}_2) = -S_1 \sin \psi_1 \operatorname{tg} d_1 - S_2 \sin \psi_2 \operatorname{tg} d_2.$$

Легко видѣть теперь, что изъ этихъ 13 уравненій шестое, девятое и двѣнадцатое удовлетворяютъ тождественно, а затѣмъ тождественны между собой — второе, четвертое и восьмое, третье и одинадцатое, первое и пятое, такъ что у насъ остается всего лишь *шесть* уравненій съ неизвѣстными ω_r , S_r , S_1 , S_2 , $\mathfrak{D}_r$ и $\mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2$.

§ 33. Эти уравненія будутъ послѣ подстановки и нѣкоторыхъ упрощеній

$$\begin{aligned} \sin \psi (S \sin \omega - S_r \sin \omega_r) - S_1 \sin \psi_1 \sin \omega_1 - S_2 \sin \psi_2 \sin \omega_2 = \\ = 2\pi i \frac{\sin \psi}{L} (\mathfrak{D}_r + \mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \psi (S \sin \omega - S_r \sin \omega_r) - S_1 \cos \psi_1 \sin \omega_1 - S_2 \cos \psi_2 \sin \omega_2 = \\ = -2\pi \frac{\sin \psi}{L} (\mathfrak{D}_r - \mathfrak{D}_1 - \mathfrak{D}_2) \end{aligned}$$

$$S \cos \omega + S_r \cos \omega_r - S_1 \cos \omega_1 - S_2 \cos \omega_2 = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\cos^2 \psi}{L} (S \sin \omega + S_r \sin \omega_r) - \frac{\cos^2 \psi_1}{L_1} S_1 \sin \omega_1 - \frac{\cos^2 \psi_2}{L_2} S_2 \sin \omega_2 - \\ - - 2\pi i \frac{\sin^2 \psi}{L} (\mathfrak{D}_r + \mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2) \\ \frac{\cos \psi}{L} (S \cos \omega - S_r \cos \omega_r) - \frac{\cos \psi_1}{L_1} S_1 \cos \omega_1 - \frac{\cos \psi_2}{L_2} S_2 \cos \omega_2 = 0 \\ - S_1 \sin \psi_1 \operatorname{tg} d_1 - S_2 \sin \psi_2 \operatorname{tg} d_2 - 2\pi \frac{\sin \psi}{L} (\mathfrak{D}_r - \mathfrak{D}_1 - \mathfrak{D}_2), \end{aligned}$$

Такимъ образомъ и въ случаѣ кристалловъ задача объ отраженіи и преломленіи свѣта на границѣ двухъ средъ можетъ быть вполне рѣшена безъ помощи еще какаго либо новаго соотношенія между искомыми величинами. Но такое соотношеніе даетъ намъ законъ сохраненія энергій, удовлетворявшійся въ случаѣ изотропныхъ прозрачныхъ средъ тождественно: значитъ, это же должно имѣть мѣсто и въ случаѣ кристалловъ.

Исключая теперь изъ перваго и четвертаго нашихъ уравненій сумму $\mathfrak{D}_r + \mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2$, а изъ втораго и послѣдняго разность $\mathfrak{D}_r - \mathfrak{D}_1 - \mathfrak{D}_2$, получаемъ четыре уравненія для опредѣленія ω_r , S_r , S_1 , S_2 и два уравненія для опредѣленія $\mathfrak{D}_r$ и $\mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2$. Такимъ образомъ имѣемъ:

$$\begin{aligned} S \sin \omega + S_r \sin \omega_r = S_1 \sin \omega_1 \frac{\sin \psi}{\sin \psi_1} + S_2 \sin \omega_2 \frac{\sin \psi}{\sin \psi_2} \\ S \cos \omega + S_r \cos \omega_r = S_1 \cos \omega_1 + S_2 \cos \omega_2 \end{aligned} \quad (137)$$

$$S \cos \omega - S_r \cos \omega_r = S_1 \cos \omega_1 \frac{\cos \psi_1 \sin \psi}{\cos \psi \sin \psi_1} + S_2 \cos \omega_2 \frac{\cos \psi_2 \sin \psi}{\cos \psi \sin \psi_2}$$

$$S \sin \omega - S_r \sin \omega_r = S_1 (\cos \psi_1 \sin \omega_1 + \sin \psi_1 \operatorname{tg} d_1) \frac{1}{\cos \psi} + S_2 (\cos \psi_2 \sin \omega_2 + \sin \psi_2 \operatorname{tg} d_2) \frac{1}{\cos \psi}$$

и кромѣ того

$$\begin{aligned} 4\pi i \frac{L}{\sin \psi} \mathfrak{D}_r = \sin \psi (S \sin \omega + S_r \sin \omega_r) - S_1 \sin \omega_1 \sin \psi_1 - S_2 \sin \omega_2 \sin \psi_2 \\ - i \{ \cos \psi (S \sin \omega - S_r \sin \omega_r) - S_1 \sin \omega_1 \cos \psi_1 - S_2 \sin \omega_2 \cos \psi_2 \} \end{aligned}$$

$$4\pi i \frac{\sin\psi}{L} (\mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2) = \sin\psi (S \sin\omega + S_r \sin\omega_r) - S_1 \sin\omega_1 \sin\psi_1 - S_2 \sin\omega_2 \sin\psi_2 \\ + i \left\{ \cos\psi (S \sin\omega - S_r \sin\omega_r) - S_1 \sin\omega_1 \cos\psi_1 - S_2 \cos\omega_2 \sin\psi_2 \right\},$$

такъ что $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_2$ каждое въ отдѣльности опредѣлить нельзя: но въ этомъ и нѣтъ надобности, ибо преломленная поверхность волна опредѣляется именно суммою $\Phi_1 + \Phi_2$, а множители при $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_2$, какъ мы видѣли, тождественны.

Пермножимъ теперь первое и четвертое, второе и третье изъ уравненій (137): мы будемъ имѣть

$$(S^2 \sin^2 \omega - S_r^2 \sin^2 \omega_r) \cos\psi = S_1^2 \left\{ \cos\psi_1 \sin^2 \omega_1 \frac{\sin\psi}{\sin\psi_1} + \sin\omega_1 \sin\psi \operatorname{tg} d_1 \right\} + \\ + S_2^2 \left\{ \cos\psi_2 \sin^2 \omega_2 \frac{\sin\psi}{\sin\psi_2} + \sin\omega_2 \sin\psi \operatorname{tg} d_2 \right\} + \\ + S_1 S_2 \left\{ \sin\omega_1 \sin\omega_2 \cos\psi_1 \frac{\sin\psi}{\sin\psi_1} + \sin\psi_1 \operatorname{tg} d_1 \sin\omega_2 \frac{\sin\psi}{\sin\psi_1} \right\} + \\ + S_1 S_2 \left\{ \sin\omega_1 \sin\omega_2 \cos\psi_2 \frac{\sin\psi}{\sin\psi_2} + \sin\psi_2 \operatorname{tg} d_2 \sin\omega_1 \frac{\sin\psi}{\sin\psi_2} \right\}$$

и

$$(S^2 \cos^2 \omega - S_r^2 \cos^2 \omega_r) \cos\psi = S_1^2 \cos^2 \omega_1 \cos\psi_1 \frac{\sin\psi}{\sin\psi_1} + S_2^2 \cos^2 \omega_2 \cos\psi_2 \frac{\sin\psi}{\sin\psi_2} + \\ + S_1 S_2 (\cos\omega_1 \cos\omega_2 \cos\psi_1 \frac{\sin\psi}{\sin\psi_1} + \cos\omega_1 \cos\omega_2 \cos\psi_2 \frac{\sin\psi}{\sin\psi_2}),$$

а складывая эти оба уравненія, находимъ

$$(S^2 - S_r^2) \cos\psi = S_1^2 \frac{\sin\psi}{\sin\psi_1} (\cos\psi_1 + \sin\psi_1 \sin\omega_1 \operatorname{tg} d_1) + \\ + S_2^2 \frac{\sin\psi}{\sin\psi_2} (\cos\psi_2 + \sin\psi_2 \sin\omega_2 \operatorname{tg} d_2) + F,$$

гдѣ

$$F = S_1 S_2 \left\{ \frac{\sin\psi}{\sin\psi_1} (\sin\omega_1 \sin\omega_2 \cos\psi_2 + \sin\psi_2 \operatorname{tg} d_2 \sin\omega_1 + \cos\omega_1 \cos\omega_2 \cos\psi_1) + \right. \\ \left. + \frac{\sin\psi}{\sin\psi_2} (\sin\omega_1 \sin\omega_2 \cos\psi_1 + \sin\psi_1 \operatorname{tg} d_1 \sin\omega_2 + \cos\omega_1 \cos\omega_2 \cos\psi_2) \right\}$$

или же послѣ приведенія къ одному знаменателю и замѣчая, что

$$\sin 2\psi_1 + \sin 2\psi_2 = 2\sin(\psi_1 + \psi_2)\cos(\psi_1 - \psi_2).$$

и

$$\cos\omega_1\cos\omega_2 + \sin\omega_1\sin\omega_2\cos(\psi_1 - \psi_2) = \cos\varphi,$$

гдѣ φ уголъ между направленіями колебаніями въ обѣихъ преломленныхъ волнахъ, находимъ

$$F = S_1 S_2 \frac{\sin\psi}{\sin\psi_1 \sin\psi_2} \left\{ \sin(\psi_1 + \psi_2)\cos\varphi + \sin\omega_1 \sin^2\psi_2 \operatorname{tg} d_2 + \right. \\ \left. + \sin\omega_2 \sin^2\psi_1 \operatorname{tg} d_1 \right\}.$$

Мы увидимъ ниже, что законъ сохраненія энергіи выражается соотношеніемъ

$$(S^2 - S_r^2)\cos\psi = S_1 \frac{\sin\psi}{\sin\psi_1} (\cos\psi_1 + \sin\psi_1 \operatorname{tg} d_1 \sin\omega_1) + \\ + S_2 \frac{\sin\psi}{\sin\psi_2} (\cos\psi_2 + \sin\psi_2 \operatorname{tg} d_2 \sin\omega_2),$$

и сравнивая это уравненіе съ только что нами выведеннымъ изъ уравненія (137), мы заключаемъ, что должно быть

$$F = 0,$$

т. е. что

$$S_1 S_2 \frac{\sin\psi}{\sin\psi_1 \sin\psi_2} \left\{ \sin(\psi_1 + \psi_2)\cos\varphi + \sin\omega_1 \sin^2\psi_2 \operatorname{tg} d_2 + \sin\omega_2 \sin^2\psi_1 \operatorname{tg} d_1 \right\} = 0.$$

Это уравненіе удовлетворяется тождественно, когда исчезаетъ одинъ изъ преломленныхъ лучей, т. е. когда S_1 или S_2 обращаются въ 0. Во всѣхъ остальныхъ случаяхъ мы имѣемъ значитъ

$$\frac{\sin\psi}{\sin\psi_1 \sin\psi_2} \left\{ \sin(\psi_1 + \psi_2)\cos\varphi + \sin\omega_1 \sin^2\psi_2 \operatorname{tg} d_2 + \sin\omega_2 \sin^2\psi_1 \operatorname{tg} d_1 \right\} = 0,$$

т. е. известное соотношеніе между направленіями колебаній и лучей съ ихъ нормальми. Можно было бы доказать, что это соотношеніе не дастъ ничего новаго и можетъ быть получено независимо отъ закона сохраненія энергіи; но мы не будемъ продѣлывать нужнаго для этой цѣли большаго счета. Достаточно уже и того, что полученное уравненіе удовлетворяется во всѣхъ частныхъ случаяхъ. Такъ напр. при нормальномъ паденіи, когда

$$\psi = \psi_1 = \psi_2 = \pi,$$

мы имѣемъ

$$\cos \varphi = 0$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2},$$

т. е. направленія колебаній взаимно перпендикулярны; если одинъ изъ лучей совпадаетъ со своей нормалью, т. е. если напр.

$$\alpha_1 = 0,$$

то колебанія снова будутъ взаимно нормальны, если $\omega_1 = 0$. Это, какъ известно, имѣетъ мѣста всегда въ одноосныхъ кристаллахъ, такъ какъ тамъ обыкновенный лучъ всегда поляризованъ въ плоскости паденія, если падающій лучъ лежитъ въ плоскости главнаго сѣченія и т. д.

Теперь намъ остается заняться выводомъ выраженія для закона сохраненія энергіи.

§ 34. Разсуждая такъ же, какъ и въ § 13, найдемъ электростатическую энергію объема Ω кристаллической среды въ видѣ

$$E_s = \frac{1}{8\pi} \int \Omega (D_x P^2 + D_y Q^2 + D_z R^2);$$

но изъ уравненія (124) имѣемъ легко

$$P = \frac{2\pi i}{T} \frac{1}{\mathfrak{B}_0} \frac{1}{\mathfrak{B}^2} \mathfrak{B}_x \cdot U$$

$$Q = \frac{2\pi i}{T} \frac{1}{\mathfrak{B}_0} \frac{1}{\mathfrak{B}^2} \mathfrak{B}_y \cdot V$$

$$R = \frac{2\pi i}{T} \frac{1}{\mathfrak{B}_0} \frac{1}{\mathfrak{B}^2} \mathfrak{B}_z \cdot W$$

или же

$$P = -\frac{1}{\mathfrak{B}_0} \frac{1}{\mathfrak{B}^2} \mathfrak{B}_x \frac{\partial U}{\partial t}$$

$$Q = -\frac{1}{\mathfrak{B}_0} \frac{1}{\mathfrak{B}^2} \mathfrak{B}_y \frac{\partial V}{\partial t}$$

$$R = -\frac{1}{\mathfrak{B}_0} \frac{1}{\mathfrak{B}^2} \mathfrak{B}_z \frac{\partial W}{\partial t},$$

гдѣ, понятно, $\mathfrak{B}$ есть скорость распространенія волны въ кристаллѣ, а не въ верхней изотропной средѣ. Такимъ образомъ, имѣемъ

$$E_s = \frac{1}{8\pi} \frac{1}{\mathfrak{B}_0} \frac{1}{\mathfrak{B}^2} \int d\Omega \left\{ \mathfrak{B}_x \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + \mathfrak{B}_y \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 + \mathfrak{B}_z \cdot \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 \right\}.$$

Энергія же магнитная того же объема будетъ

$$E_m = \frac{1}{8\pi} \frac{1}{\mathfrak{B}_0} \int d\Omega \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right\},$$

или же вводя въ оба эти выраженія вмѣсто U , V , W , ихъ выраженія черезъ S , имѣемъ

$$E_s = \frac{1}{8\pi} \frac{1}{\mathfrak{B}_0} \frac{1}{\mathfrak{B}^2} \int d\Omega (a^2 \mathfrak{B}_x^2 + b^2 \mathfrak{B}_y^2 + c^2 \mathfrak{B}_z^2) \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2$$

$$E_m = -\frac{1}{8\pi} \frac{1}{\mathfrak{B}_0} \frac{4\pi^2}{L^2} \int d\Omega \left\{ (a\beta - ab)^2 + (a\gamma - ac)^2 + (b\gamma - \beta c)^2 \right\} S^2$$

или же, припоминая уравненіе (122) и замѣчая, что

$$(a\beta - ab)^2 + (a\gamma - ac)^2 + (b\gamma - \beta c)^2 = 1,$$

будемъ имѣть

$$E_s = E_m = \frac{1}{8\pi} \frac{1}{\mathfrak{B}_0^2} \frac{1}{\mathfrak{B}^2} \int d\Omega \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2.$$

Итакъ, оба рода энергіи равны между собой и въ кри-
сталахъ, какъ въ изотропныхъ тѣлахъ, и полная энергія объ-
ема Ω всякой среды есть поэтому

$$E = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\mathfrak{B}_0^2} \frac{1}{\mathfrak{B}^2} \int d\Omega \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2.$$

Какъ видимъ, эта энергія и здѣсь вовсе независитъ
отъ поверхностныхъ волнъ, благодаря тому, что мы приняли
 $\varepsilon = \infty$.

Если теперь Ω есть часть объема пространства, заня-
таго падающей волной, Ω_r , Ω_1 , Ω_2 , соответственные объемы
взятые тамъ, гдѣ имѣется движеніе отраженной и прелом-
ленныхъ волнъ, то законъ сохраненія энергіи выражается
тѣмъ, что

$$E = E_r + E_1 + E_2, \quad (138)$$

гдѣ

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\mathfrak{B}_0^2} \frac{1}{\mathfrak{B}^2} \int d\Omega \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 \\ E_r &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\mathfrak{B}_0^2} \frac{1}{\mathfrak{B}^2} \int d\Omega_r \left(\frac{\partial S_r}{\partial t} \right)^2 \\ E_1 &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\mathfrak{B}_0^2} \frac{1}{\mathfrak{B}^2} \int d\Omega_1 \left(\frac{\partial S_1}{\partial t} \right)^2 \\ E_2 &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\mathfrak{B}_0^2} \frac{1}{\mathfrak{B}^2} \int d\Omega_2 \left(\frac{\partial S_2}{\partial t} \right)^2. \end{aligned} \quad (139)$$

Здѣсь Ω , Ω_r , Ω_1 , Ω_2 должны быть опредѣлены слѣ-
дующимъ образомъ: ограничимъ падающую волну цилиндромъ
съ образующими, параллельными ея нормали; этотъ цилиндръ
вырѣжемъ изъ плоскости раздѣла нашихъ средъ площадь σ ,
и породить движеніе въ трехъ новыхъ цилиндрахъ, встрѣ-

чающихся съ плоскостью раздѣла по той же площади σ_0 . Образующія перваго цилиндра будутъ параллельны нормали отраженной волны; образующія второго и третьяго—параллельны соответственнымъ преломленнымъ лучамъ. Если σ есть нормальное сѣченіе цилиндра падающей волны, σ_r —такое же сѣченіе цилиндра отраженной волны, а σ_1 и σ_2 суть сѣченія „преломленныхъ“ цилиндровъ, параллельныя соответственнымъ плоскостямъ волнъ и стало-быть *не нормальныя*, то по ур. (135) имѣемъ, очевидно,

$$\begin{aligned}\sigma &= -\sigma_0(\alpha p + \beta q + \gamma r) = -\sigma_0 \cos \psi \\ \sigma_r &= \sigma_0(\alpha_r p + \beta_r q + \gamma_r r) = \sigma_0 \cos \psi_r = -\sigma_0 \cos \psi \quad (140) \\ \sigma_1 &= -\sigma_0(a_1 p + b_1 q + v_1 r) \\ \sigma_2 &= -\sigma_0(a_2 p + b_2 q + v_2 r).\end{aligned}$$

Пусть въ теченіе періода T движеніе падающей волны распространяется между двумя нормальными сѣченіями цилиндра AB и $A'B'$; ихъ разстояніе будетъ, очевидно, L ; въ теченіе того же періода движеніе въ остальныхъ цилиндрахъ будетъ происходить между сѣченіями $A_r B_r$, $A'_r B'_r$ на разстояніи L , $A_1 B_1$ и $A'_1 B'_1$ на разстояніи L_1 , $A_2 B_2$ и $A'_2 B'_2$ на разстояніи L_2 . Законъ сохраненія энергіи требуетъ, чтобы энергія объема $ABA'B'$ равнялась суммѣ энергій объемовъ $A_r B_r A'_r B'_r$, $A_1 B_1 A'_1 B'_1$ и $A_2 B_2 A'_2 B'_2$. Наши Ω , Ω_r , Ω_1 , Ω_2 и суть эти объемы (чер. 6).

Общій видъ функціи S есть, какъ мы знаемъ,

$$S = S e^{i\Theta}$$

$$\Theta = 2\pi \left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{L} - \frac{t}{T} \right)$$

и это выраженіе независитъ отъ осей координатъ: переходя поэтому отъ x , y , z къ осямъ ξ , η , ζ будемъ имѣть согласно прежнимъ обозначеніямъ

$$\Theta = 2\pi \left(\frac{\bar{\alpha}\xi + \bar{\beta}\eta + \bar{\gamma}\zeta}{L} - \frac{t}{T} \right),$$

или при $\bar{y}=0$

$$\Theta = 2\pi \left(\frac{\xi \cos \psi + \eta \sin \psi}{L} - \frac{t}{T} \right);$$

это выражение символическое; беря дѣйствительное, имѣемъ въ общемъ видѣ

$$S = S \cos 2\pi \left(\frac{\xi \cos \psi + \eta \sin \psi}{L} - \frac{t}{T} \right).$$

Итакъ, у насъ, если отнесемъ движеніе къ соответственнымъ моментамъ t, t_r, t_1, t_2 , будетъ

$$S = S \cos 2\pi \left(\frac{\xi \cos \psi + \eta \sin \psi}{L} - \frac{t}{T} \right) = S \cos \Theta$$

$$S_r = S_r \cos 2\pi \left(\frac{-\xi_r \cos \psi + \eta_r \sin \psi}{L} - \frac{t_r}{T} \right) = S_r \cos \Theta_r$$

$$S_1 = S_1 \cos 2\pi \left(\frac{\xi_1 \cos \psi_1 + \eta_1 \sin \psi_1}{L_1} - \frac{t_1}{T} \right) = S_1 \cos \Theta_1$$

$$S_2 = S_2 \cos 2\pi \left(\frac{\xi_2 \cos \psi_2 + \eta_2 \sin \psi_2}{L_2} - \frac{t_2}{T} \right) = S_2 \cos \Theta_2$$

$$d\Omega = d\xi \, d\eta \, d\zeta$$

$$d\Omega_r = d\xi_r \, d\eta_r \, d\zeta_r$$

$$d\Omega_1 = d\xi_1 \, d\eta_1 \, d\zeta_1$$

$$d\Omega_2 = d\xi_2 \, d\eta_2 \, d\zeta_2.$$

и законъ сохраненія энергіи даетъ по подстановкѣ ур. (139) въ ур. (138) и сокращеніи

$$\frac{S^2}{L^3} \int \sin^2 \Theta \, d\Omega = \frac{S_r^2}{L^3} \int \sin^2 \Theta_r \, d\Omega_r + \frac{S_1^2}{L_1^3} \int \sin^2 \Theta_1 \, d\Omega_1 + \frac{S_2^2}{L_2^3} \int \sin^2 \Theta_2 \, d\Omega_2. \quad (141)$$

Пусть теперь будутъ $\delta, \delta_r, \delta_1, \delta_2$ разстоянія плоскостей $AB, A_r B_r, A_1 B_1$ и $A_2 B_2$ отъ начала координатъ, а e, e_r, e_1 и e_2 ихъ разстоянія отъ параллельныхъ имъ сѣченій цилиндровъ, проведенныхъ въ точкахъ $\xi, \eta, \zeta, \xi_r, \eta_r, \zeta_r, \xi_1, \eta_1, \zeta_1$ и ξ_2, η_2, ζ_2 . Тогда очевидно

$$d\Omega = \sigma de$$

$$d\Omega_r = \sigma_r de_r$$

$$d\Omega_1 = \frac{\sigma_1}{\cos d_1} de_1$$

$$d\Omega_2 = \frac{\sigma_2}{\cos d_2} de_2,$$

гдѣ d_1 и d_2 суть углы лучей со своими нормальными волны т. е.

$$\cos d_1 = a_1 \alpha_1 + b_1 \beta_1 + \gamma_1 \gamma_1$$

$$\cos d_2 = a_2 \alpha_2 + b_2 \beta_2 + \gamma_2 \gamma_2,$$

и кромѣ того

$$\Theta = 2\pi \left(\frac{e}{L} - \frac{\delta}{L} - \frac{t}{T} \right)$$

$$\Theta_r = 2\pi \left(\frac{e_r}{L} - \frac{\delta_r}{L} - \frac{t_r}{T} \right)$$

$$\Theta_1 = 2\pi \left(\frac{e_1}{L_1} - \frac{\delta_1}{L_1} - \frac{t_1}{T} \right)$$

$$\Theta_2 = 2\pi \left(\frac{e_2}{L_2} - \frac{\delta_2}{L_2} - \frac{t_2}{T} \right)$$

и потому имѣемъ уравненіе энергіи (141) въ видѣ

$$\begin{aligned} \frac{S^2}{L^2} \sigma \int_0^L \sin^2 \Theta de &= \frac{S_r^2}{L^2} \sigma_r \int_0^L \sin^2 \Theta_r de_r + \frac{S_1^2}{L_1^2} \sigma_1 \int_0^{L_1} \sin^2 \Theta_1 de_1 + \\ &+ \frac{S_2^2}{L_2^2} \sigma_2 \int_0^{L_2} \sin^2 \Theta_2 de_2, \end{aligned}$$

или же послѣ подстановки сюда значеній σ , σ_r , σ_1 , σ_2 изъ ур. (140) и интеграціи и замѣчая, что

$$\int_0^L \sin^2 \Theta de = \frac{L}{2} \text{ и т. д.,}$$

будемъ имѣть

$$(S^2 - S_r^2) \cos \psi = S_1^2 \frac{\sin \psi_1}{\sin \psi_1} \frac{a_1 p + b_1 q + \gamma_1 r}{\cos d_1} + S_2^2 \frac{\sin \psi_2}{\sin \psi_2} \frac{a_2 p + b_2 q + \gamma_2 r}{\cos d_2}.$$

Но

$$a_1 p + b_1 q + v_1 r$$

и

$$a_2 p + b_2 q + v_2 r$$

суть косинусы угловъ лучей съ осью ξ ; строя изъ начала координатъ ξ , η , ζ сферу и отмѣчая на ней сферическій треугольникъ, образуемый направлѣніями нормали волны, луча и осью ξ , имѣемъ (черт. 7)

$$a_1 p + b_1 q + v_1 r = \cos \psi_1 \cos d_1 + \sin \psi_1 \sin d_1 \sin \omega_1$$

$$a_2 p + b_2 q + v_2 r = \cos \psi_2 \cos d_2 + \sin \psi_2 \sin d_2 \sin \omega_2$$

и потому

$$(S^* - S_r^*) \cos \psi = S_1^* \frac{\sin \psi}{\sin \psi_1} (\cos \psi_1 + \sin \psi_1 \operatorname{tg} d_1 \sin \omega_1) + \\ + S_2^* \frac{\sin \psi}{\sin \psi_2} (\cos \psi_2 + \sin \psi_2 \operatorname{tg} d_2 \sin \omega_2). \quad (141)$$

Уравненіями (137) такимъ образомъ рѣшается вполнѣ задача объ отраженіи и преломленіи свѣта на границѣ изотропной и кристаллической среды въ общемъ видѣ, а уравненіе энергіи позволяетъ опредѣлять и яркости отраженныхъ и преломленныхъ лучей. Примѣненіе затѣмъ общихъ формулъ къ различнымъ частнымъ случаямъ уже не представляетъ никакихъ затрудненій. Результаты будутъ совершенно согласны съ опытными данными, въ чемъ мы можемъ убѣдиться на одномъ простомъ примѣрѣ.

§ 35. Пусть мы имѣемъ одноосный кристаллъ, срѣзанный нормально къ оптической оси, принимаемой нами за ось x . Очевидно, въ этомъ случаѣ

$$p = 1, \quad q = 0, \quad r = 0$$

$$\mathfrak{B}_y = \mathfrak{B}_x$$

и, такъ какъ около оси x все симметрично, то мы можемъ взять оси y и z совпадающими съ осями η и ζ , и тогда $\bar{a} = a$, и т. д. Ур. (131) переписутся такъ

$$\begin{aligned} \alpha_1 b_1 c_1 (\mathfrak{B}_y^2 - \mathfrak{B}_x^2) + \beta_1 a_1 c_1 (\mathfrak{B}_x^2 - \mathfrak{B}_x^2) + \gamma_1 a_1 b_1 (\mathfrak{B}_x^2 - \mathfrak{B}_y^2) &= 0 \\ \alpha_1 b_1 c_1 (\mathfrak{B}_y^2 - \mathfrak{B}_x^2) + \beta_1 a_1 c_1 (\mathfrak{B}_x^2 - \mathfrak{B}_x^2) + \gamma_1 a_1 b_1 (\mathfrak{B}_x^2 - \mathfrak{B}_y^2) &= 0, \end{aligned}$$

откуда имѣемъ

$$\begin{aligned} \beta_1 a_1 c_1 (\mathfrak{B}_y^2 - \mathfrak{B}_x^2) &= 0 \\ \beta_1 a_1 c_1 (\mathfrak{B}_y^2 - \mathfrak{B}_x^2) &= 0, \end{aligned}$$

т. е.

$$\beta_1 = 0, \text{ или } a_1 = 0, \text{ или же } c_1 = 0$$

и

$$\beta_1 = 0, \text{ или } a_1 = 0, \text{ или же } c_1 = 0.$$

Ур. (134) показываетъ, что $\beta_1 = 0$ и $\beta_1 = 0$ невозможны, такъ какъ это значило бы, что $\beta = \sin \psi = 0$. Мы беремъ

$$a_1 = 0 \text{ и } c_1 = 0.$$

Теперь ур. (128) даетъ

$$b_1 = 0,$$

а ур. (132)

$$c_1 = 1,$$

и потому изъ ур. (130)

$$\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}^x = \mathfrak{B}_y = \text{const.}$$

Точно также для второго луча получимъ

$$\begin{aligned} a_2 \cos \psi_2 + b_2 \sin \psi_2 &= 0 \\ a_2^2 + b_2^2 &= 1, \end{aligned}$$

откуда

$$a_1 = \sin \psi_1$$

$$b_1 = -\cos \psi_1,$$

и изъ ур. (130) и (136) имѣемъ

$$\mathfrak{B}_1 = \sqrt{\mathfrak{B}_y^2 + (\mathfrak{B}_x^2 - \mathfrak{B}_y^2) \sin^2 \psi_1}$$

$$\frac{\sin \psi}{\mathfrak{B}} = \frac{\sin \psi_1}{\mathfrak{B}_1},$$

или же

$$\sin \psi_1 = \frac{\mathfrak{B}_y \sin \psi}{\sqrt{\mathfrak{B}^2 - \mathfrak{B}_x^2 - \mathfrak{B}_y^2} \sin^2 \psi}$$

$$\cos \psi_1 = \frac{\sqrt{\mathfrak{B}^2 - \mathfrak{B}_x^2} \sin^2 \psi}{\sqrt{\mathfrak{B}^2 - (\mathfrak{B}_x^2 - \mathfrak{B}_y^2) \sin^2 \psi}}.$$

Отсюда заключаемъ, что первый лучъ распространяется съ постоянной скоростью, второй — съ переменною; первый слѣдуетъ закону Снеллія—Декарта, второй—нѣтъ; первый лучъ поляризованъ въ плоскости паденія, второй — нормально къ ней; первый лучъ есть обыкновенный, второй—необыкновенный. Припоминая наконецъ, что теперь

$$a_1, b_1, c_1$$

$$a_2, b_2, c_2$$

суть косинусы угловъ лучей съ осями ξ, η, ζ , имѣемъ для опредѣленія этихъ шести величинъ уравненія

$$\frac{a_1 b_1 - b_1 a_1}{a_1 b_1 - \beta_1 a_1} = \frac{c_1 a_1 - a_1 c_1}{\gamma_1 a_1 - \alpha_1 c_1} = \frac{b_1 c_1 - c_1 b_1}{\beta_1 c_1 - \gamma_1 b_1}$$

$$\frac{a_2 b_2 - b_2 a_2}{a_2 b_2 - \beta_2 a_2} = \frac{c_2 a_2 - a_2 c_2}{\gamma_2 a_2 - \alpha_2 c_2} = \frac{b_2 c_2 - c_2 b_2}{\beta_2 c_2 - \gamma_2 b_2}$$

$$a_1^2 + b_1^2 + v_1^2 = 1$$

$$a_2^2 + b_2^2 + v_2^2 = 1$$

$$a_1 a_2 \mathfrak{B}_x^2 + b_1 b_2 \mathfrak{B}_y^2 + c_1 v_2 \mathfrak{B}_x^2 = 0$$

$$a_2 a_1 \mathfrak{B}_x^2 + b_2 b_1 \mathfrak{B}_y^2 + c_2 v_1 \mathfrak{B}_x^2 = 0,$$

откуда находимъ по ур. (125)

$$\cos d_1 = a_1 \alpha_1 + b_1 \beta_1 + v_1 \gamma_1 = 1,$$

т. е. первый лучъ совпадаетъ съ нормалью своей волны, а для второго луча имѣемъ

$$v_2 = \gamma_2 (a_2 b_2 - b_2 a_2),$$

т. е.

$$v_2 = 0,$$

и лучъ лежитъ въ плоскости паденія, образуя со своей нормалью уголъ d_2 , причемъ по ур. (125)

$$\cos d_2 = \frac{a_2^2 \mathfrak{B}_x^2 + b_2^2 \mathfrak{B}_y^2 + c_2^2 \mathfrak{B}_x^2}{\sqrt{a_2^2 \mathfrak{B}_x^4 + b_2^2 \mathfrak{B}_y^4 + c_2^2 \mathfrak{B}_x^4}},$$

или же

$$\cos d_2 = \frac{\mathfrak{B}_x^2 \sin^2 \psi_2 + \mathfrak{B}_y^2 \cos^2 \psi_2}{\sqrt{\mathfrak{B}_x^4 \sin^2 \psi_2 + \mathfrak{B}_y^4 \cos^2 \psi_2}},$$

или

$$\cos d_2 = \frac{\mathfrak{B}_y^2 + (\mathfrak{B}_x^2 - \mathfrak{B}_y^2) \sin^2 \psi_2}{\sqrt{\mathfrak{B}_y^4 + (\mathfrak{B}_x^4 - \mathfrak{B}_y^4) \sin^2 \psi_2}}.$$

Намъ остается опредѣлить S_r , S_1 , S_2 , ω_r , $\mathfrak{D}_r$ и $\mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2$ изъ ур. (137). Изъ первыхъ трехъ уравненій находимъ легко

при $\omega_1 = 0$ и $\omega_2 = \frac{\pi}{2}$,

$$S_r = S \frac{\cos \omega}{\cos \omega_r} \frac{\sin(\psi_1 - \psi)}{\sin(\psi_1 + \psi)}$$

$$S_1 = S \cos \omega \frac{4 \cos \psi \cos \psi_1}{\sin(\psi_1 + \psi)}$$

$$S_2 = S (\sin \omega + \cos \omega \operatorname{tg} \omega_r \frac{\sin(\psi_1 - \psi)}{\sin(\psi_1 + \psi)}) \frac{\sin \psi_2}{\sin \psi},$$

а подстановка этихъ выраженій въ четвертое изъ ур. (137) при

$$d_1 = 0$$

даетъ по сокращеніи на S уравненіе для опредѣленія ω_r :

$$\begin{aligned} & (\sin \omega - \cos \omega \operatorname{tg} \omega_r \frac{\sin(\psi_1 - \psi)}{\sin(\psi_1 + \psi)}) \cos \psi = \\ & = (\sin \omega + \cos \omega \operatorname{tg} \omega_r \frac{\sin(\psi_1 - \psi)}{\sin(\psi_1 + \psi)}) (\cos \psi_2 - \sin \psi_2 \operatorname{tg} d_2) \frac{\sin \psi_2}{\sin \psi}. \end{aligned}$$

§ 36. Разберемъ два случая: пусть сначала падающая волна поляризована въ плоскости паденія. Тогда

$$\omega = 0$$

и наше ур. даетъ намъ

$$\operatorname{tg} \omega_r = 0$$

или

$$\frac{\sin(\psi_1 - \psi)}{\sin(\psi_1 + \psi)} = 0,$$

или же

$$-\cos \psi = (\cos \psi_2 - \sin \psi_2 \operatorname{tg} d_2) \frac{\sin \psi_2}{\sin \psi}.$$

Последніа два уравненія невозможны; значить

$$\omega_r = 0,$$

т. е. отраженный лучъ поляризованъ тоже въ плоскости паденія и

$$S_r = S \frac{\sin(\psi_1 - \psi)}{\sin(\psi_1 + \psi)},$$

т. е. его амплитуда выражается формулой такой же, какъ и въ случаѣ отраженія отъ изотропной среды. Далѣе находимъ

$$\begin{aligned} S_1 &= S \frac{4 \cos \psi \sin \psi_1}{\sin(\psi_1 + \psi)} \\ S_2 &= 0, \end{aligned}$$

т. е. мы имѣемъ преломленный одинъ обыкновенный лучъ.

Пусть теперь падающая волна поляризована нормально, въ плоскости паденія; тогда

$$\omega = \frac{\pi}{2}$$

и совершенно тѣмъ же путемъ, какъ и въ разобраннымъ сейчасъ случаѣ, заключаемъ, что и

$$\omega_r = \frac{\pi}{2},$$

т. е. снова отраженный лучъ поляризованъ въ одной плоскости съ падающимъ. У насъ остаются затѣмъ два уравненія для опредѣленія S_r и S_1 , ибо $S_2 = 0$:

$$S + S_r = S_1 \frac{\sin \psi}{\sin \psi_1}$$

$$(S - S_r) \cos \psi = S_1 (\cos \psi_1 - \sin \psi_1 \operatorname{tg} d_1),$$

откуда

$$\frac{S + S_r}{S - S_r} = \frac{\sin \psi \cos \psi}{\sin \psi_1 (\cos \psi_1 - \sin \psi_1 \operatorname{tg} d_1)} = \frac{\sin 2\psi}{\sin 2\psi_1} \cdot \frac{\cos \psi_1}{\cos \psi_1 - \sin \psi_1 \operatorname{tg} d_1},$$

или же, полагая

$$\frac{\cos\psi_2}{\cos\psi_2 - \sin\psi_2 \operatorname{tg} d_2} = \frac{1}{1 - \operatorname{tg}\psi_2 \operatorname{tg} d_2} = \frac{1}{0}.$$

имѣемъ

$$S_r = S \frac{\sin 2\psi - O \sin 2\psi_2}{\sin 2\psi + O \sin 2\psi_2},$$

$$S_2 = S \frac{4 \cos \psi \sin \psi_2}{\sin 2\psi + O \sin 2\psi_2}.$$

Въ этомъ случаѣ, значить, у насъ остается одинъ преломленный необыкновенный лучъ.

Въ общемъ случаѣ, когда ω лежитъ между 0 и $\frac{\pi}{2}$, мы будемъ имѣть два преломленныхъ луча и одинъ отраженный; плоскость поляризаціи послѣдняго будетъ повернута относительно плоскости поляризаціи луча падающаго.

При

$$\sin 2\psi = O \sin 2\psi_2$$

отраженный лучъ будетъ всецѣло поляризованъ въ плоскости паденія и это уравненіе позволяетъ опредѣлить уголъ поляризаціи.

При

$$\Re < \Re_x$$

возможно, что случится

$$\Re - \Re_x \sin^2 \psi > 0;$$

тогда $\cos \psi_2$ будетъ мнимо, $\sin \psi_2 > 1$ и мы имѣемъ полное внутреннее отраженіе необыкновеннаго луча; при этомъ, конечно, можетъ быть

$$\Re > \Re_y.$$

тогда какъ въ механической теоріи свѣта предположеніе такой скорости ведетъ къ противорѣчію съ опытными данными (Гринъ); тамъ, судя по Томсону, нужно принять эту скорость безконечно малой. Такимъ образомъ у насъ окончательно исчезаетъ надежда свести теорію свѣта на механику однороднаго упругаго твердаго тѣла, результатъ—совершенно согласный и съ другими данными ученія объ электричествѣ: тѣ механическія силы, къ которымъ могутъ быть сведены электромагнитныя явленія не суть силы, возможныя въ однородномъ упругомъ твердомъ тѣлѣ ¹⁾. Нельзя ли думать, что ученіе о вихряхъ и въ вопросѣ о свѣтовыхъ явленіяхъ имѣетъ столь же блестящую будущность, какъ и во многихъ другихъ вопросахъ физики?....

Казань, май 1891.

¹⁾ Ср. *Maxwell*, 1. с., p. 255 sq.; также Part I, art. 108.

III.

ЛѢТОПИСЬ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

Протоколъ 13-го засѣданія

30 Ноября 1891 г.

(Въ засѣданіи присутствовали 25 членовъ и около 10 постороннихъ лицъ)

I. Предсѣдатель сообщилъ о кончинѣ члена общества, Сергѣя Павловича Орлова; покойный, окончивъ курсъ по филологическому факультету въ Казанскомъ университетѣ, специализировался одно время по философіи, а затѣмъ занималъ должность лектора англійскаго языка; послѣдніе годы покойный съ большимъ жаромъ занимался изученіемъ высшей математики; въ декабрѣ 1889 года онъ сдѣлалъ въ нашемъ обществѣ сообщеніе о рѣшеніи уравненій 5-й степени при помощи тригонометрическихъ таблицъ.

Члены общества по предложенію предсѣдателя постановили по подпискѣ возложить вѣнокъ на гробъ покойнаго и почтили память его вставаніемъ.

II) *Д. А. Гольдшмеръ* сдѣлалъ сообщеніе о дисперсіи и абсорбціи свѣта съ точки зрѣнія электромагнитной теоріи свѣта; сообщеніе будетъ напечатано въ „Извѣстіяхъ Общества“.

III. *А. В. Красновъ* сообщилъ объ окончательныхъ результатахъ нивелировки, произведенной Казанской астрономической обсерваторіей лѣтомъ 1891 года съ цѣлью дополненія и повѣрки нивелировки прошлаго года; многіе пункты города и его окрестностей связаны по высотѣ съ нулемъ водомѣрнаго поста; расположеннаго на противоположномъ городу берегу Волги. Приводимъ окончательно полученную высоту марки, вбитой въ стѣнѣ астрон. обсерваторіи: 72,^м 538 надъ уровнемъ Балтійскаго моря.

IV. *И. К. Криницынъ* демонстрировалъ образчики изготовляемыхъ имъ деревянныхъ, картонныхъ, стеклянныхъ и другихъ моделей правильныхъ многогранниковъ и изложилъ употребляемый имъ практический способъ изготовленія сплошныхъ правильныхъ многогранниковъ; приемъ этотъ, подробно изложенный имъ въ приготавливаемой къ печати статьѣ: „О построеніи правильныхъ многогранниковъ по данному ребру“ состоитъ въ слѣдующемъ: сначала приготавливаютъ призму, объемлющую должествующій быть построеннымъ многогранникъ; отсѣкая отъ этой призмы куски вдоль легко опредѣляемыхъ по положенію плоскостей получаютъ и самый многогранникъ.

Протоколъ 14-го засѣданія

29 Декабря 1891 года

(Въ засѣданіи присутствовали 15 членовъ и около 5 постороннихъ лицъ).

I. По предложенію А. В. Васильева и М. С. Сегеля избранъ единогласно въ члены общества.

198. *Петръ Карповичъ Криницынъ*, кандидатъ математики Казанскаго университета.

II. Предсѣдатель сообщилъ обществу о послѣдовавшей кончинѣ знаменитаго германскаго математика Кронекера, изложилъ въ краткой рѣчи научныя заслуги покойнаго и предложилъ обществу почтить память покойнаго вставаньемъ.

III. *Г. Н. Шебуевъ* сдѣлалъ сообщеніе подъ заглавіемъ: „задача объ охлажденіи нагрѣтаго шара въ потокѣ жидкости“. Авторъ интегрируетъ уравненія задачи для того случая, когда температура жидкости уже на незначительномъ разстояніи отъ поверхности шара равна постоянной температурѣ потока.

IV. М. С. Сегель доложилъ сообщеніе *С. М. Стемпневскаго*: „о геометрическомъ значеніи модуля сѣченія при изгибѣ и крученіи“. Для случая изгиба балки авторъ даетъ въ этомъ сообщеніи доказательство слѣдующей теоремы изъ элементарной теоріи сопротивленія матеріаловъ: модуль сѣченія (частное отъ дѣленія момента инерціи сѣченія балки относительно нейтральной линіи сѣченія на разстояніе отъ нейтральной линіи до наиболѣе напряженнаго волокна) равенъ частному отъ дѣленія суммы моментовъ объемовъ сжатія и удлиненія, взятыхъ относительно нейтральной линіи на уд-

линеніе (или сжатіе) наиболѣе напряженнаго волокна. Теорема эта по мнѣнію автора неудовлетворительно доказана въ руководствахъ употребительныхъ при среднемъ техническомъ преподаваніи.

Называя ω_i —элементъ площади сѣченія, r_i —его разстояніе отъ нейтральной линіи и обозначая r разстояніе отъ нейтральной линіи до наиболѣе напряженнаго волокна, авторъ въ выраженіи модуля сѣченія: $\frac{\Sigma \omega_i r_i^2}{r}$ замѣняетъ въ числитель одного множителя r_i , а также знаменателя r , взявъ ихъ значенія изъ пропорцій:

$$\frac{r_i}{\delta_i} = \frac{r}{\delta} = \frac{R}{Z},$$

гдѣ δ_i удлинненіе волокна, отстоящаго на r_i отъ нейтральной линіи, δ —удлинненіе или сжатіе наиболѣе напряженнаго волокна, R —радіусъ кривизны изогнутой балки и Z длина нейтральной линіи; тогда:

$$\frac{\Sigma \omega_i r_i^2}{r} = \frac{\Sigma \omega_i \delta_i r_i}{\delta},$$

такъ какъ $\omega_i \delta_i r_i$ есть взятый относительно нейтральной линіи моментъ элемента объема удлинненія (или сжатія), то теорема доказана. Подобную теорему авторъ доказываетъ и для случая крученія балки.

Въ концѣ засѣданія гг. члены общества приглашены были осмотрѣть магнитную обсерваторію университета.

ЗАДАЧА ИЗЪ ТЕОРИИ ЧИСЕЛЪ.

Формула простыхъ чиселъ.

Въ „Теоріи Сравненій“ П. Чебышева (Спб. 1849, на стр. 223—225) доказана теорема: функція $\varphi(x)$, опредѣляющая число (N) простыхъ чиселъ меньшихъ $x = p + \alpha$, приблизительно выражается чрезъ

$$N = \frac{x}{\lambda x} + \frac{1 \cdot x}{\lambda^2 x} + \frac{1 \cdot 2x}{\lambda^3 x} + \dots + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)x}{\lambda^n x}.$$

λ означаетъ неперовъ логарифмъ. Эта функція разнится отъ функціи Лежандра

$$N = \frac{x}{\lambda x - 1,08366},$$

и разность ихъ получаетъ довольно большую величину при $x > 10.000.000$.

Я задалъ себѣ *обратную* задачу: опредѣлить функцію $f(N) = p = x - \alpha$, которая по числу порядковаго номера N простаго числа p приблизительно выражаетъ *величину* этого простаго числа (p) меньшаго искомаго ближайшаго предѣла x на *цѣлое* число α , и по ней опредѣлить сумму S *всѣхъ* простыхъ чиселъ съ единицы по число p включительно: $\Sigma[f(N)] = \Sigma(p) = S$, или функцію $S = \psi(N)$.

Съ 9 августа 1891 года составляя для „Уральскаго Общества Любителей Естествознанія въ Екатеринбургѣ“ таблицу *простыхъ* чиселъ въ предѣлахъ съ 1 до 10.000.000. съ показаніемъ *разностей* между сосѣдними числами и *суммъ*

всѣхъ ихъ, начиная съ единицы, я замѣтилъ, что разность $\frac{p}{N} - \frac{S}{\frac{1}{2}N(N+1)} = d$ стремится къ постоянному предѣлу (0,552), и что $2d > 1,08366$, вышеозначеннаго *Лежандрова* вычитаемого числа.

Для любопытствующихъ приводится нами слѣдующая таблица:

<i>N.</i>	<i>p.</i>	<i>S</i>	<i>p:N</i>	<i>Differ.</i>
125	683	38,922	5,464	
250	1,579	180,527	6,316	0,852
500	3,559	821,123	7,118	0,802
1,000	7,907	3,674,995	7,307	0,789
2,000	17,387	16,257,239	8,693	0,786
4,000	37,811	71,229,095	9,453	0,760
8,000	81,773	309,595,541	10,222	0,769
9,000	93,169	397,126,141	10,352	0,130
9,200	95,429	415,991,201	10,373	0,021
10,000	104,723	496,060,681	10,472	0,099

<i>N.</i>	<i>S: \frac{N(N+1)}{2}</i>	<i>Differ.</i>	$\frac{1}{2}N(N+1)$	<i>d</i>	<i>Средняя.</i>
125	4,942		7,875	0,529	0,522
250	5,754	0,812	31,375	0,562	0,542
500	6,556	0,802	125,250	0,562	0,549
1,000	7,343	0,787	500,500	0,564	0,552
2,000	8,127	0,784	2,001,000	0,566	0,555
4,000	8,901	0,774	8,002,000	0,552	0,555
8,000	9,674	0,773	32,004,000	0,548	0,554
9,000	9,805	0,131	40,504,500	0,547	0,553
9,200	9,829	0,024	42,324,600	0,544	0,552
10,000	9,920	0,091	50,005,000	0,552	0,552

Казанскому Физико-Математическому Обществу не угодно ли будетъ взять на себя трудъ вышеозначенную задачу опредѣленія функцій $p=f(N)$ и $S=\psi(N)$ рѣшить теоретически прежде чѣмъ рѣшу ее чрезъ 20 лѣтъ практически.

Священникъ *И. М. Первушинъ.*

Списокъ книгъ и періодическихъ изданій по Физико-математическимъ наукамъ, поступившихъ въ бібліотеку Физико-математическаго Общества при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ за время отъ апрѣля 1891 года по декабрь 1891 года.

I. Математика.

1) *Арифметика.*

А. Павловъ. О начальномъ обученіи дѣтей счисленію въ школѣ и дома. Екатеринбург. 1890. 3 экз.

2) *Теорія чиселъ.*

П. В. Преображенскій. Теорія бинарныхъ квадратичныхъ формъ. М. 1890.

П. В. Преображенскій. Принципъ узловыхъ точекъ. Каз. 88.

3) *Алгебра.*

П. В. Преображенскій. Замѣчанія по поводу статьи Лахтина: «Нѣкоторыя упрощенія въ рѣшеніи неопред. уравненій 2-й степ. съ 2 неизвестными».

4) *Определенные интегралы и некоторые особые виды функций.*

Покровский. О преобразованіяхъ ультра-эллиптическихъ интеграловъ и функций 1-го класса. М. 1891.

Покровский. Историческій очеркъ теоріи ультра-эллиптическихъ и абелевыхъ функций. М. 1886.

Покровский. Теорія ультра-эллиптическихъ функций 1-го класса. М. 1883.

Покровский. Соотношеніе между модулями и ихъ дополненіями для преобразованія 5-й степени эллиптическихъ функций.

Покровский. Теорія эллиптических функций. М. 1886.

П. В. Преображенскій. Упрощенное наложение теоріи Эйлеровыхъ интеграловъ. М. 1890. 5 экз.

5) *Тригонометрія.*

П. В. Преображенскій. Руководство прямолинейной тригонометрии. М. 1890.

П. В. Преображенскій. Сборникъ тригонометрическихъ задачъ. М. 1888.

II. Механика.

Н. Е. Жуковскій. Опредѣленіе силовой функции по данному семейству траекторій. М. 1890.

Н. Е. Жуковскій. Къ вопросу о наибольшемъ ударѣ.

Н. Е. Жуковскій. Лекціи по гидродинамикѣ. Вып. I. М. 89.

Н. Е. Жуковскій. О вліяніи давленія на насыщенные водою пески. М. 1890.

Н. Е. Жуковскій. О формѣ судовъ. М. 1890.

Н. Е. Жуковскій. О гидродинамической теоріи тренія хорошо смазанныхъ твердыхъ тѣлъ.

Н. Е. Жуковскій. Объ артиллерійскихъ снарядахъ Шапелл. М. 1890.

III. Физика и метеорологія.

Гезехусъ. О преломленіи и скорости звука въ разныхъ звукопропускающихъ тѣлахъ.

Гезехусъ. О значеніи метеорологическихъ наблюденій по отношенію къ Сибири. Томскъ. 1889.

В. В. Преображенскій. Геометрическая теорія преломленія свѣта. М. 1884. 25 экз.

Слугиновъ. Научный отдѣлъ на французской выставкѣ въ Москвѣ. Каз. 1891.

Слугиновъ. Наблюденія земнаго магнетизма въ 1889 г. въ Казани. Каз. 1890.

Слугиновъ. Наблюденія земнаго магнетизма въ Казани въ 1884 г. Каз. 1891.

IV. Периодическія изданія.

Варшавскія университетскія Извѣстія. 1891. № 3, 4, 5.

Вѣстникъ опытной физики и элементарной математики. №№ 121—122—123—124—125—126—127.

Записки Кіевскаго общества естествоиспытателей. Т. XI, вып. 2 и 3. (3-й вып. въ 2-хъ экз.).

Записки Математическаго отдѣленія Новороссійскаго общества естествоиспытателей. т. XIII.

Записки Новороссійскаго общества естествоиспытателей. т. XVI вып. 1.

Извѣстія Петровской сельско-хозяйственной академіи. 1890 г. вып. 3, 1891, вып. 1.

Извѣстія Императорскаго Русскаго Географическаго общества. т. XXVII, вып. IV, V.

Математическій Сборникъ, изд. Московскимъ математическимъ обществомъ. т. XV, 4 и т. XVI, 1.

Отчетъ и протоколы физико-матем. общества при Кіевскомъ университетѣ, за 1890 г.

Сообщенія Харьковскаго математическаго общества. т. III, №№ 1 и 2.

Университетскія Извѣстія. Кіевъ. №№ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. 1891 г.

Труды отдѣл. физическ. наукъ общ. любителей естествознанія. т. III вып. 1, т. IV вып. 1.

Ученыя Записки Импер. Казанск. унив. 1891. № 3, 4, 5.

Bulletin de la Société Imperiale des naturalistes de Moscou. 1889. 1891. № 4.

Zeitschrift für mathem. und naturwissensch. Unterricht. Von Hofmann. 1890. № 6.

Atti della reale academia dei Lincei. Roma 1891. Ser. IV. Rendiconti. Vol. VII, 1 sem., № 1—10, 2 sem.

Compte Rendu des séances de la société de physique de Genève. VII, 1890.

The Analyst. 1883. Vol. X. № 1—6.

Mathesis. Recueil Mathématique. publ. par Mansion et Neuberg.
Sér. 2 t. 1, 1891.

Rendiconti del circolo matematico di Palermo. 1891. Fasc. I—II, III, IV—V.

Transactions of the Connecticut academy of arts and Sciences.
Vol. VIII, p. 1.

Il nuovo cimento. Pisa. 1891. t. XXIX, t. XXX, 7, 8.

Rivista di Matematica, diretta da Peano. Torino. 1891. Fascic. 6—7, 8—9, 11—12.

Rendiconto dell'academia delle scienze fisiche e matematiche.
Napoli. Ser. 2, Vol. V. Fasc. 1—8. (6—2 экз.).

Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas. Teixeira. Vol. X. № 3. Coimbra. 1891.

О ш ъ о ъ.

Отчетъ за время съ 1 ноября 1889 г. по 1 сент. 1891 по
Николаевской астроном. обсерваторіи въ Пулковѣ. Спб. 1891.

Указатель русской литературы по математикѣ и естественн.
наукамъ за 1889. 1 и 2 вып.

Записка о дѣятельности Отдѣленія физич. наукъ Император.
Общества любителей естествознанія. 1881—1889. М. 1890.

Жуковский, Некрасовъ и Покровский. Жизнь и труды А. Ю.
Давидова. М. 1890.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

I.

	<i>Стр.</i>
Д. Гольдгаммеръ. Электромагнитная теорія свѣта . . .	261.

II.

Лѣтопись Физико-математическаго Общества.

Протоколы 13 — 14 засѣданій Физико-математическаго Общества.	67.
І. М. Первушинъ. Задача изъ теоріи чиселъ. Формула простыхъ чиселъ.	70.
Списокъ книгъ и періодическихъ изданій по физико-математическимъ наукамъ	72.
Объявленія.	

ВЪ КНИЖНЫХЪ МАГАЗИНАХЪ КАЗАНИ

ПРОДАЕТСЯ БРОШЮРА Н. НЕЧАЕВА

„О МЕТОДИКАХЪ АРИΘΜΕΤΙΚΗΣ.“

ЦѢНА 30 КОП.

ВЪ КНИЖНОМЪ МАГАЗИНѢ

А. А. Дубровина

Коммиссіонера Императорскаго Казанскаго университета и Хозяйственнаго управленія при Святѣйшемъ Синодѣ, Казань Воскресенская уд. Гостинный дв. № 1-й.

Продаются между прочимъ слѣдующія книги:

- Бобровниковъ Н.** Сборникъ упражненій въ умственномъ счетѣ К. 1890 г. Ц. 40 к.
- Васильевъ А.** Объ отдѣленіи корней совокупныхъ уравненій К. 1874 Ц. 30 к.
Объ особенныхъ рѣшеніяхъ въ связи съ задачею интегрированія дифференціальныхъ уравненій перваго порядка. Казань. 1878.
О функціяхъ рациональныхъ аналогичныхъ съ функціями двоякопериодическими. Казань. 1880.
Преподаваніе чистой математики въ Берлинскомъ и Лейпцигскомъ Университетахъ. К. 1882 г. Ц. 30 к.
Теорія отдѣленія корней системъ алгебраическихъ уравненій. Казань 1884.
Роль профессора Вейерштрасса въ современномъ развитіи математики. К. 1885 г. Ц. 25 к.
Изъ исторіи и философіи понятія о цѣломъ положительномъ числѣ. Казань 1891 г.
Теорія вѣроятностей. Лекціи К. 1885 г. Ц. 1 р. 75 к.
- Клаузіусъ Р.** Введеніе въ математическую физикѣ. О потенциальной функціи и потенциалѣ. Переводъ Предт-го, съ предисл. проф. Больцана, К. 1873 г. Ц. 80 к.
- Ковалевъ В.** Геометрія для городскихъ училищъ, К. 1878 г. Ц. 50 к.
- Коли Р.** О поляризаціи въ электролитахъ Спб. 1878 г. Ц. 50 к.
О законѣ сохраненія энергіи, В. 1-й К. 1879 г. Ц. 50 к.
- Макаревичъ И.** Учебникъ прямолинейной тригонометріи К. 1886 г. Ц. 1 р.
- Максимовичъ В.** О непосредственныхъ доказательствахъ вращательнаго движенія земли. К. 1882 г. Ц. 15 к.
Интерполированіе неявныхъ функцій и вычисленіе корней К. 1883 г. Ц. 20 к.
О назначеніи предѣла модулю интеграла, взятаго по сомкнутой кривой К. 1883 г. Ц. 10 к.

- Объ интегрированіи помощію производныхъ отрицательнаго порядка. К. 1883 г. Ц. 10 к.
- О доказательствѣ существованія корня всякаго алгебраическаго уравненія. К. 1883 г. Ц. 10 к.
- Новая теорія гамильтоновыхъ паръ и соотвѣтственное обобщеніе теоріи функций мнимаго переменнаго. К. 1884 г. Ц. 30 к.
- Разысканіе общихъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка, интегрирующихся въ конечномъ видѣ, и доказательство невозможности такого интегрированія для общаго линейнаго уравненія втораго порядка. К. 1885 г. Ц. 50 к.
- Нечаевъ Н.** О методикахъ ариѳметики. Спб. 1887 г. Ц. 30 к.
- Орловъ А.** Руководство къ геометрическому линейному черченію вып. 2-й съ атласомъ чертежей К. 1883 г. Ц. 3 р. (Выпускъ 1-й распроданъ).
- Землетрясенія и ихъ соотношенія съ другими явленіями природы. К. 1887 г. Ц. 1 р.
- Павловъ Н.** Опытъ систематическаго сборника задачъ для начальнаго обученія ариѳметикѣ. К. 1891 г. Ц. 30 к.
- Свѣшниковъ П.** Опредѣленіе изображеній предметовъ, разсматриваемыхъ черезъ центрированныя системы сферическихъ преломляющихъ поверхностей К. 1888 г. Ц. 30 к.
- Серебровский М.** Популярное изложеніе стереометріи К. 1870 г. Ц. 60 к.
- Сластниковъ С.** Статьи дополнителныя къ курсу алгебры 2 в. К. 1880—81 г. К. 1—31 к.
- Свѣтовые явленія въ атмосферѣ. Вольскъ 1883 г. Ц. 80 к.
- Слугиновъ Н.** О плотностяхъ молекулъ. К. 1887 г. Ц. 25 к.
- О соотношеніи между плотностью, теплоемкостью и атомнымъ вѣсомъ химическихъ элементовъ К. 1888 г. Ц. 20 к.
- О теплѣ вольтовой дуги. К. 1888 г. Ц. 1 р.
- О метеорологическихъ и фотометрическихъ наблюденіяхъ во время солнечнаго затмѣнія 1887 г. К. 1888 г. Ц. 1 р.
- Соколовъ И.** Элементарная теорія тригонометрическихъ линий и прямолинейная тригонометрія. Изд. 4-е испр. К. 1873 г. Ц. 60 к.
- Суворовъ Ф.** Объ изображеніи воображаемыхъ точекъ и воображаемыхъ прямыхъ на плоскости и построенія кривыхъ линий второй степени, опредѣляемыхъ помощію воображаемыхъ точекъ и касательныхъ. К. 1884 г. Ц. 1 р. 50 к.
- Шебуевъ Г.** Руководство къ теоретической оптикѣ 2 вып. К. 1886—87 г. Ц. 1-му вып. 1 р. 50., 2-му 1 р. за оба выпуска Ц. 2 р. 50 коп.
- Курсъ механики матеріальной точки К. 1890 г. Ц. 2 р. 30 к.
- Объ опредѣленіи величины и направленія силы однороднаго магнитнаго поля К. 1888 г. Ц. 50 к.
- О распространеніи свѣтовыхъ колебаній въ прозрачной кристаллической средѣ К. 1884 г. Ц. 30 к.
- Распространеніе теоремы Кирхгофа на случай кристаллической среды К. 1886 г. Ц. 25 к.
- Выводъ и приближенное интегрированіе дифференціальныхъ уравненій, объясняющихъ по гипотезѣ Томсона вращеніе плоскости поляризаціи свѣтоваго луча. К. 1887 г. Ц. 25 к.

А. Иностранціе при выпискѣ книгъ благоволятъ прилагать отъ 10 до 15% на рубль смотря по разстоянію. Книги могутъ быть высланы и съ наложеніемъ платежа. Подробный каталогъ Каванскихъ изданій высылается за одну семикопѣчную почтовую марку.

ВЪ КНИЖНОМЪ МАГАЗИНѢ

Н. Я. БАШМАКОВА.

Казань, Воскрес. ул., д. проф. Болдырева,

между прочимъ продаются слѣдующія книги:

- Физическая геологія.** Мушкетова. Ч. 1-я. Общія свойства земли, вулканическія, сейсмическія и дислокаціонныя явленія; ч. 2-я: геологическая дѣятельность атмосферы и воды. 88—91 г. ц. 17 р.
- Руководство къ практикѣ** физическихъ измѣреній съ прибавленіемъ статьи объ абсолютной системѣ мѣръ. Кольрауша. 91 г. ц. 3 р.
- Теплота**, разсматриваемая, какъ родъ движенія. Публичныя лекціи Джона Тиндала. Перев. Шимкова. Изд. 2-е. 88 г. ц. 3 р. 75 коп.
- Свойства матеріи.** Тета. Перев. подъ редакц. Сѣченова. 87 г. ц. 2 р. 50 к.
- Теплота.** Его-же. Перев. подъ редакц. Усова. 88 г. ц. 3 р.
- Учебникъ физики** для среднеучебныхъ заведеній. Ковалевскаго. Удостоено преміи Императора Петра Великаго. 91 г. ц. 2 р. 20 к.
- Основанія физики.** Краевича. Изд. 9-е пересмотр. 91 г. ц. 1 р. 60 к.
- Начальный учебникъ физики и химіи.** Королькова и Матюшенко. 91 г. ц. 1 р. 50 к.
- Современныя взгляды на электричество.** Лоджа. Перев. подъ редакц. Егорова. 89 г. ц. 1 р. 50 к.
- Курсъ варіаціоннаго исчисленія.** Проф. Лѣтникова. (Посмертное изданіе). 91 г. ц. 1 р. 25 к.
- Теорія давленія земли** основанная на новѣйшихъ воззрѣніяхъ. Перев. Миллера. 89 г. ц. 50 к.
- Вычерчиваніе кривыхъ** посредствомъ круговыхъ дугъ. Гохмана. 91 г. ц. 30 к.
- Курсъ графической статистики.** Schlotke. Изложенъ для г.г. архитекторовъ, техникувъ, строителей и пр. Изданіе Нейткса. 92 г. ц. 2 р.
- Конспектъ** по органической химіи. Васютинскаго. 91 г. ц. 1 р.
- Издъ исторіи и философіи** понятія о цѣломъ положительномъ числѣ. Проф. Васильева. К. 1891. ц. 25 к.
- Курсъ механики.** Лекціи читанныя въ Казанскомъ университетѣ Г. Н. Шебуевымъ: ч. 1. Механика матеріальной точки. К. 1890 г. ц. 2 р. 30 к., ч. 2. Механика системы матеріальныхъ точекъ. К. 1891 г. ц. 3 р. (для г.г. студентовъ уступка 20%).

Магазинъ получаетъ своевременно вновь выходящія книги по всѣмъ отраслямъ знаній. Высылка иногороднимъ можетъ производиться съ наложеннымъ платежемъ.

Каталоги и объявленія высылаются бесплатно — просятъ сообщать желаніе и адресъ.

УЧЕНЫЯ ЗАПИСКИ

ИМПЕРАТОРСКАГО

Казанскаго Университета

НА 1893 ГОДЪ.

Въ Ученыхъ Запискахъ помѣщаются

I. Въ отдѣлѣ наукъ: ученые изслѣдованія профессоровъ и преподавателей; сообщенія и наблюденія; публичныя лекціи и рѣчи; отчеты по ученымъ командировкамъ и извлеченія изъ нихъ; научныя работы студентовъ, а также рекомендованныя факультетами труды постороннихъ лицъ.

II. Въ отдѣлѣ критики и библіографіи: профессорскія рецензіи на магистерскія и докторскія диссертатіи, представляемыя въ Казанскій Университетъ, и на студентскія работы, представляемыя на соисканіе наградъ; критическія статьи о вновь появляющихся въ Россіи и за границей книггахъ и сочиненіяхъ по всѣмъ отраслямъ знанія; библіографическіе отзывы и замѣтки.

III. Университетская лѣтопись: извлеченія изъ протоколовъ засѣданій Совѣта, отчеты о диспутахъ, статьи, посвященныя обзорѣннѣю коллекцій и состоянію учебно-вспомогательныхъ учрежденій при Университетѣ, біографическіе очерки и некрологи профессоровъ и другихъ лицъ, стоявшихъ близко къ Казанскому Университету, обзорѣннѣя преподаванія, распредѣленія лекцій, актовъ и проч.

IV. Приложенія: университетскіе курсы профессоровъ и преподавателей; памятники историческіе и литературные съ научными комментаріями и памятники, имѣющіе научное значеніе и еще не обнародованные.

Ученныя Записки выходятъ періодически шесть разъ въ годъ книжками въ размѣрѣ не менѣе 15 листовъ, не считая извлеченій изъ протоколовъ и особыхъ приложеній.

Подписная цѣна въ годъ со всѣми приложеніями 6 руб., съ пересылкою 7 р. Отдѣльныя книжки можно получать въ редакціи по 1 руб. 50 к. Подписка принимается въ Правленіи Университета.

Редакторъ *Θ. Мищенко.*

ПОПУЛЯРНО-НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛЪ
ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРН. МАТЕМАТИКИ

составляетъ продолженіе основаннаго въ 1884 г. въ Кіевѣ

Профессоромъ В. П. Ермаковымъ

„ЖУРНАЛА ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ“

Съ 1886 г. по 15-е іюня 1891 г. «Вѣстникъ Оп. Физики и Эл. Математики» издавался подъ редакціею Э. К. Шпачинскаго въ г. Кіевѣ, а съ 15-го іюня 1891 года, подъ тою-же редакціею,

издается въ г. Одессѣ.

Журналъ былъ рекомендованъ: Ученымъ Комитетомъ Министерства Народнаго Просвѣщенія для гимназій мужскихъ и женскихъ, реальныхъ училищъ, прогимназій, учительскихъ институтовъ, семинарій и городскихъ училищъ; Главнымъ Управленіемъ Военно-Учебныхъ Заведеній—для военно-учебныхъ заведеній; Ученымъ Комитетомъ при Святѣйшемъ Синодѣ журналъ былъ одобренъ для духовныхъ семинарій и училищъ.

Въ теченіе каждаго учебнаго полугодія (семестра) выходитъ 12 номеровъ журнала въ формѣ брошюръ.

Подписная цѣна съ пересылкой:

На годъ—всего 24 №№ 6 руб. | На полугодіе—всего 12 №№ . 3 руб
(Книжнымъ магазинамъ 5% уступки).

Учителя и учительницы низшихъ училищъ и всѣ учащіеся при непосредственныхъ сношеніяхъ съ конторой редакціи могутъ подписываться на журналъ на льготныхъ условіяхъ, а именно:

За годъ 4 руб. | За полугодіе 2 руб.

На такихъ же условіяхъ можетъ быть принимаема и коллективная подписка на 1 экз. журнала отъ студенческихъ и ученическихъ обществъ, отдѣльныхъ курсовъ, классовъ, частныхъ учен. квартиръ и пр.

Менѣе чѣмъ на одно полугодіе подписка не принимается.

Разорочка подписной платы допускается по соглашенію.

За перемѣну адреса уплачивается 10 коп.

Подписчики, желающіе внести подписную плату какъ наложенный платежъ на одинъ изъ текущихъ №№ журн., доплачив. 20 к.

Комплекты №№ за всѣ прежніе семестры (отъ I до XI вкл.), сброшюрованные по 12 №№ въ книги, продаются по 2 р. 50 к., а льготнымъ подписчикамъ и книгопродавцамъ—по 2 р. за каждый.

Полный комплектъ всѣхъ 132 №№ (въ 11 томахъ) стоитъ 22 р. съ пересылкой.

Отдѣльные №№ продаются: одиночно по 30 к., двойные по 50 к.

Всѣ читатели журнала приглашаются быть его сотрудниками и корреспондентами.

Адресъ: Г. Одесса, Редакція „Вѣстника Оп. Физ. и Эл. Математики“.

ОБЪ ИЗДАНИИ
УЧЕНАГО И КРИТИКО-БИБЛИОГРАФИЧЕСКАГО ЖУРНАЛА
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКІЯ НАУКИ

въ нихъ

НАСТОЯЩЕМЪ И ПРОШЕДШЕМЪ

на 1892 годъ.

ВОСЬМОЙ ГОДЪ ИЗДАНИЯ.

Въ 1892 году журналъ «Физико-Математическія Науки въ настоящемъ и прошедшемъ» будетъ выходить, какъ и въ предыдущіе годы, четыре раза въ годъ (по четвертямъ года) книжками въ 8-ю долю листа, не менѣе семи листовъ въ каждой, по слѣдующей программѣ:

- 1) Статьи по исторіи и философіи физико-математическихъ наукъ.
- 2) Матеріалы и статьи по исторіи развитія физико-математическихъ знаній въ Россіи.
- 3) Біографіи ученыхъ.
- 4) Статьи, посвященныя изложенію и разработкѣ общихъ и частныхъ вопросовъ физико-математическихъ наукъ, а также и ихъ приложеніямъ къ другимъ наукамъ.
- 5) Статьи по методологіи и преподаванію физико-математическихъ наукъ.
- 6) Отчеты и критическія статьи о новыхъ книгахъ и журнальныхъ статьяхъ по физико-математическимъ наукамъ.
- 7) Статьи по древней и новой бібліографіи физико-математическихъ наукъ.
- 8) Бібліографическій указатель выходящихъ въ свѣтъ книгъ и журнальныхъ статей по физико-математическимъ наукамъ, какъ русскихъ, такъ и иностранныхъ.
- 9) Объявленія.

ПОДПИСНАЯ ЦѢНА ВЪ ГОДЪ СЪ ПЕРЕСЫЛКОЙ И ДОСТАВКОЙ
ШЕСТЬ РУБЛЕЙ.

Подписка принимается: въ Редакціи журнала «Физико-Математическія Науки» (Москва, Гороховская улица, домъ № 21, кв. № 1).

Оставшіеся отъ подписки экземпляры журнала за 1885, 1886 и 1887 годы можно выписывать изъ Редакціи по ДЕСЯТИ рублей за каждый годъ съ пересылкою и доставкою, а за 1888, 1889 и 1890 годы на тѣхъ же условіяхъ за ШЕСТЬ рублей *).

Редакторъ-издатель *В. В. Бобынинъ.*

*) До 1888 года журналъ выходилъ въ размѣрѣ не менѣе 48 листовъ въ годъ

Изданія физико-математической секціи Общества Естествоиспытателей при Императорскомъ Казанскомъ университетѣ.

- 1) Собраніе протоколовъ, томъ 1-й, цѣна 2 р.
- 2) Тоже, томъ 2-й, цѣна съ кабинетнымъ портретомъ Н. И. Лобачевского 2 р., безъ портрета 1. 75 к.
- 3) Тоже, томъ 3-й; цѣна: съ кабинетнымъ портретомъ М. А. Ковальскаго 1 р. 75 к., безъ портрета 1 р. 50.
- 4) Тоже, томъ 4-й; цѣна 1 р. 50 к.
- 5) Тоже, томъ 5-й; цѣна: съ кабинетнымъ портретомъ П. И. Котельникова 1 р. 75 к., безъ портрета 1 р. 50 к.
- 6) Тоже, томъ 6-й; цѣна 1 р. 50 к.
- 7) Тоже, томъ 7-й; цѣна 1 р. 50 к.
- 8) Тоже, томъ 8-й цѣна съ кабинетнымъ портретомъ И. С. Громеки 1 р. 75 к., безъ портрета 1 р. 50 к.
- 9) Брошюра «М. А. Ковальскій» съ кабинетн. портретомъ; ц. 60 к.
- 10) Брошюра «П. И. Котельниковъ»; цѣна съ кабинетнымъ портретомъ 50 к., безъ портрета 30 к.
- 11) Каталогъ библіотеки секціи; цѣна 25 к.
- 12) Брошюра «И. С. Громека»; цѣна съ кабинетнымъ портретомъ 60 к. безъ портрета 30 к.
- 13) Уставъ Физико-математическаго Общества при Императорскомъ Казанскомъ университетѣ. Ц. 5 к.
- 14) Отчетъ о дѣятельности секціи физико-математическихъ наукъ за 1889—90 г. Ц. 10 к.

Продаются въ книжныхъ магазинахъ въ Казани.



„ИЗВѢСТІЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

ПРИ ИМПЕРАТОРСКОМЪ КАЗАНСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ.

„Извѣстія“, издаваемые подъ редакціей Совѣта Общества, выходятъ выпусками отъ четырехъ до шести въ годъ, изъ которыхъ къ концу года составляется томъ не менѣе 20-ти листовъ.

„Извѣстія“ раздѣляются на два отдѣла.

1) Въ первомъ отдѣлѣ помѣщаются научныя и педагогическія статьи изъ области физико-математическихъ наукъ, читанныя въ засѣданіяхъ Общества.

2) Второй отдѣлъ содержитъ:

а) Лѣтопись Физико-математическаго Общества (протоколы засѣданій, извлеченія изъ протоколовъ засѣданій Совѣта Общества, годовые отчеты, списки книгъ и періодическихъ изданій, поступившихъ въ библіотеку Общества и т. п.).

б) Библіографическіе отзывы и замѣтки о вновь появляющихся въ Россіи и заграницею сочиненіяхъ по физико-математическимъ наукамъ. Научныя новости.

в) Задачи и вопросы, предлагаемые для рѣшенія, и рѣшенія ихъ.

Въ „Извѣстіяхъ“ могутъ быть съ разрѣшенія Совѣта помѣщаемы объявленія библіографическія и другія, имѣющія отношеніе къ физико-математическимъ наукамъ.

Члены Физико-математическаго Общества пожизненные, а равно и уплатившіе установленный членскій взносъ за предъидущій годъ, получаютъ Извѣстія бесплатно.

Для постороннихъ лицъ подписная цѣна на „ИЗВѢСТІЯ“ въ годъ 3 р. (съ доставкою и пересылкою).

Подписка принимается предсѣдателемъ Физико-математическаго Общества проф. А. В. Васильевымъ и секретаремъ Общества М. С. Сегелемъ (Университетъ), а также въ Казани книжными магазинами А. А. Дубровина (Гостинный дворъ № 1) и Н. Я. Вашмакова (Воскресенская, д. Болдырева), въ С.-Петербургѣ у А. С. Суворина, М. М. Стасюлевича, К. Л. Рикера и Н. П. Карбасникова.

Первую серію „Извѣстій“ составляютъ восемь томовъ собранія протоколовъ засѣданій секціи физико-математическихъ наукъ Общества Естествоиспытателей при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ.





This book should be returned to
the Library on or before the last date
stamped below.

A fine is incurred by retaining it
beyond the specified time.

Please return promptly.

